Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

Quasiordnung

Eine reflexive und transitive Relation R über M heißt auch *Quasiordnung*.

Beispiel: Jede Äquivalenzrelation ist eine Quasiordnung.
Genauer gilt: Eine Quasiordnung ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie symmetrisch ist.

Beispiel: Betrachte über der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen die Relation $y \prec z \iff |y| \leq |z|$.
Beobachte: $\prec$ ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch.

Satz: Ist R eine Relation über M, so ist R^* die kleinste R umfassende Quasiordnung.

Halbordnungen

Eine antisymmetrische Quasiordnung R über M heißt auch *Halbordnung* (auf der gegebenen Grundmenge). Gilt xRy, so heißt x auch *Vorgänger* von y und y *Nachfolger* von x.

Beispiel: $\leq$ oder $\geq$ auf $\mathbb{R}$ sind Halbordnungen.

Beispiel: $\prec$ auf $\mathbb{C}$ ist keine Halbordnung.

Beispiel: Die Teilerrelation ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber nicht auf $\mathbb{Z}$.

Beispiel: Auf der Potenzmenge von M ist $\subseteq$ oder auch $\supseteq$ eine Halbordnung.

Lineare Ordnungen

Eine Halbordnung $\leq$ auf M heißt *linear* (*total*) gdw. $\forall x, y \in M(x \leq y \vee y \leq x)$.

Zwei Elemente $x, y \in M$ heißen *vergleichbar* gdw. $(x \leq y \vee y \leq x)$; andernfalls heißen sie *unvergleichbar*. Die HO $\leq$ ist also linear gdw. alle Elemente von M untereinander paarweise vergleichbar sind.

Satz: Ist Vergleichbarkeit transitiv, so ist sie eine Äquivalenzrelation.
Dann gilt: Eine HO ist linear gdw. die von ihr induzierte Vergleichbarkeitsrelation hat nur eine Äquivalenzklasse.

Beispiel: Lexikalische Ordnung in einem Wörterbuch

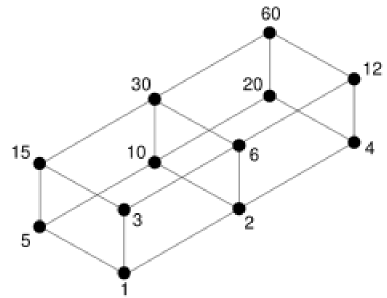
Lineare Ordnungen sind eminent wichtig für unser Leben (als Informatiker)

Bezeichnungen für “Computer”: ordinateur / ordenador

“Ordnen” (Sortieren) ist die “Rechnertätigkeit”, die am meisten Rechenzeit weltweit benötigt.

Für manche “gutartige” Sortierverfahren ist es entscheidend für ihre Laufzeit, wie “wenig linear” die Eingangsreihenfolge ist.

Halbordungsrelationen: ein Beispiel zum Hasse-Diagramm



Bei diesem *Hasse-Diagramm* werden “passende” unvergleichbare Elemente auf einer Ebene dargestellt.

Überführung in “normale” Graphendarstellung einer Relation durch:

(a) Einfügen von Pfeilspitzen (nach oben),
(b) Einfügen von Schlingen (Reflexivität),
(c) Einfügen weiterer Bögen (Transitivität)

echte und unmittelbare Nachfolger / Hasse-Diagramme

Es sei $\leq$ eine Halbordnung auf M. $z \in M$ heißt *unmittelbarer Nachfolger* von $x \in M$, falls (1) $x \leq z$, (2) $x \neq z$ und (3) falls aus $x \leq y \leq z$ $y = x$ oder $y = z$ folgt. Gelten nur (1) und (2), so heißt z *echter Nachfolger* von x, i.Z. $x < z$.

Hinweis: Im Hasse-Diagramm werden genau die Kanten dargestellt, die zur Relation "unmittelbarer Nachfolger" gehören.

Hinweis: Entsprechend definierbar: *echter Vorgänger*, *unmittelbarer Vorgänger*

Satz: Ist R die zu der Halbordnung $\leq$ auf M gehörige Relation des echten Nachfolgers, so ist $\leq$ gerade die reflexive Hülle von R.

Satz: Ist R die zu der Halbordnung $\leq$ auf M gehörige Relation des unmittelbaren Nachfolgers, so ist $\leq$ gerade die reflexive transitive Hülle von R.

Beispiel: Teilmengenhalbordnung von $\{a, b, c\}$.

Restriktionen

Ist R eine Relation über M und ist $N \subseteq M$, so heißt $\leq_N := (\leq \cap N \times N)$ *Restriktion* von R auf N.

Satz: Mit $\leq$ ist auch $\leq_N$ Quasiordnung bzw. Halbordnung bzw. lineare Ordnung.

Daher steckt ein Prinzip: Über Allaussagen definierte Eigenschaften übertragen sich durch Restriktion.

In einer Halbordnung $(M, \leq)$ heißt $K \subseteq M$ *Kette* gdw. die Restriktion von $\leq$ auf K eine lineare Ordnung ist.
Eine Kette K heißt *maximal*, wenn es keine K umfassende Kette gibt.

Maximalkettenprinzip von Hausdorff / Birkhoff:
In jeder halbgeordneten Menge gibt es maximale Ketten.

Sortieren—formal

Es sei $(M, \leq)$ eine totale Ordnung (z.B.: lexikalische Ordnung oder gewöhnliche Anordnung der ganzen Zahlen) und $N \subseteq M$ eine endliche Menge mit totaler Ordnung R (z.B.: (reflexive Hülle der) Anordnung im Speicher). N heißt *sortiert* bzgl.$\leq$ gdw. $R = \leq_N$.

$\leadsto$ einfacher Sortieralgorithmus:

Solange $\exists x, y \in N, x \neq y : xRy \wedge y \leq x$: $R := (R \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(y, x)\}$.

$\leadsto$ Iterative Variante: *Blasensortieren* (Bubblesort)
Es werden immer nur Nachbarn (bgzl. R) verglichen.

Iterative Variante: Blasensortieren (Bubblesort)

```
55 07 78 12 42   1.Durchlauf
07 55 78 12 42
07 55 78 12 42
07 55 12 78 42
07 55 12 42 78   2.Durchlauf
07 55 12 42 78
07 12 55 42 78
07 12 42 55 78   3.Durchlauf
07 12 42 55 78
07 12 42 55 78   4.Durchlauf
07 12 42 55 78   Fertig sortiert.
```

klein und groß...

Es sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung und $\emptyset \neq N \subseteq M$.
$x \in N$ heißt *größtes Element* von N, wenn $\forall y \in N : y \leq x$.
$x \in N$ heißt *kleinstes Element* von N, wenn $\forall y \in N : x \leq y$.
$x \in N$ heißt *maximales Element* in N, wenn $\forall y \in N : x \leq y \implies y = x$.
$x \in N$ heißt *minimales Element* in N, wenn $\forall y \in N : y \leq x \implies y = x$.
$x \in M$ heißt *obere Schranke* von N, wenn $\forall y \in N : y \leq x$.
$x \in M$ heißt *untere Schranke* von N, wenn $\forall y \in N : x \leq y$.
Eine kleinste obere Schranke heißt auch *obere Grenze* oder *Supremum*.
Eine größte untere Schranke heißt auch *untere Grenze* oder *Infimum*.

Satz: Eine Menge N besitzt ein größtes Element
gdw. eine obere Grenze liegt in N
gdw. eine obere Schranke liegt in N.
Größte Elemente und obere Schranken einer Menge sind eindeutig bestimmt.

Beispiel: Teilmengenhalbordnung von $\{a, b, c\}$.
Beispiel: $0 \prec 2 \prec 4 \prec \cdots \prec 1 \prec 3 \prec 5 \prec \cdots$ auf $\mathbb{N}$.

oh wie wohl. . .

Eine *Wohlordnung* auf einer Menge M ist eine totale Ordnung mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge von M ein bzgl. dieser Ordnung kleinstes Element hat. Die Menge M zusammen mit der Wohlordnung heißt eine wohlgeordnete Menge.

Beispiel: Die $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Wohlordnung, aber weder die gewöhnliche Anordnung der ganzen Zahlen noch die der positiven reellen Zahlen ist eine Wohlordnung.

Für die Algorithmik wichtig: noch allgemeinerer Begriff der *Wohlquasiordnung*.

Wohlordnungssatz / Wohlordnungsprinzip: Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
Hinweis: Äquivalent zum Maximalkettenprinzip und zum Auswahlaxiom.

Transfinite Induktion verallgemeinert die uns bekannte Induktion auf beliebige wohlgeordnete Mengen: Sei $(M, \leq)$ eine Wohlordnung und 0 bezeichne das kleinstes Element. Will man beweisen, dass die Eigenschaft P für alle Elemente von M zutrifft, dann beweist man bei transfiniter Induktion folgendes:
– $P(0)$ ist wahr.
– Wenn $0 \leq a$, $a \neq 0$ und $P(b)$ ist wahr ist für alle $b \leq a$, $b \neq a$, dann ist auch $P(a)$ wahr.

Wohlordnungsprinzip $\rightsquigarrow$ Induktion ist potentiell immer anwendbar.

Definitionen mit transfiniter Rekursion erstmals von J. von Neumann (1928).

Ein informatisches Inklusionsdiagramm: Der Komplexitätszoo