

Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau

Universität Trier

fernau@informatik.uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik

Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

Funktionen

Eine *partielle Funktion* F ist eine nacheindeutige binäre Relation zwischen A und B .

Eine partielle Funktion F heißt *total* oder einfach *Funktion* oder *Abbildung* gdw. F ist linkstotal.

Schreibweise: $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$

$f(a)$ *Bild* von a bei f ; a *Urbild*;

A : *Definitionsbereich*,

B : *Wertebereich*

$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B : f(a) = b\}$ *Urbildbereich*

$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$ *Bildbereich*

Satz: Eine Funktion ist total gdw. ihr Definitions- und Urbildbereich stimmen überein.

Funktionen: Beispiele

Beispiel: Die Diagonale ist eine totale Funktion.

Beispiel: Die Vorschrift, die jedem Studenten der Universität Trier seine DSL-Note zuordnet, ist eine partielle Funktion.

Beispiel: Die Relation, die sämtlichen Elementen aus A stets dasselbe Element aus B zuordnet, ist eine totale Funktion, genannt *konstante Funktion*.

Beispiel: Ist $A \subseteq B$, so kann man die Diagonale Δ_A auch als Abbildung $\iota : A \rightarrow B$ auffassen: diese heißt auch *natürliche Einbettung*. Für $A = \emptyset$ spricht man von der *leeren Abbildung*.

Funktionen und Äquivalenzrelationen

Satz: Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Dann definiert $x \sim_f y$ gdw. $f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf A .

Satz: Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf A . Es bezeichne $[a]$ die \sim -Äquivalenzklasse von a . $f_{\sim} : A \rightarrow A/\sim, a \mapsto [a]$ ist eine Abbildung.

Satz: Mit den Bezeichnungen der voranstehenden Sätze gilt:

$$\sim = \sim_{f_{\sim}} \quad \text{und} \quad f = f_{\sim_f}$$

Mengenfunktionen

Es sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation (z.B. auch eine (partielle) Funktion).

Diese kann man auch als Mengenfunktionen deuten:

$$R_1 : 2^A \rightarrow 2^B, X \mapsto \{y \in B \mid \exists x \in X (x, y) \in R\}$$

$$R_2 : 2^B \rightarrow 2^A, Y \mapsto \{x \in A \mid \exists y \in Y (x, y) \in R\}$$

Satz: $R_1(A_1 \cup A_2) = R_1(A_1) \cup R_1(A_2)$. (entsprechend für R_2)

Satz: $R_1(A_1 \cap A_2) \subseteq R_1(A_1) \cap R_1(A_2)$. (entsprechend für R_2)

Ist R durch eine Funktion $f : A \rightarrow B$ gegeben, schreibt man auch $f(X)$ statt $R_1(X)$, und $f^{-1}(Y)$ statt $R_2(Y)$.

Satz: $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Komposition von Funktionen

Satz: Sind R und S nacheindeutige Relationen über M , so auch $R \circ S$.

Satz: Sind R und S vortotale Relationen über M , so auch $R \circ S$.

Das Relationenprodukt wird im Falle (partieller) Funktionen auch oft als *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* angesprochen.

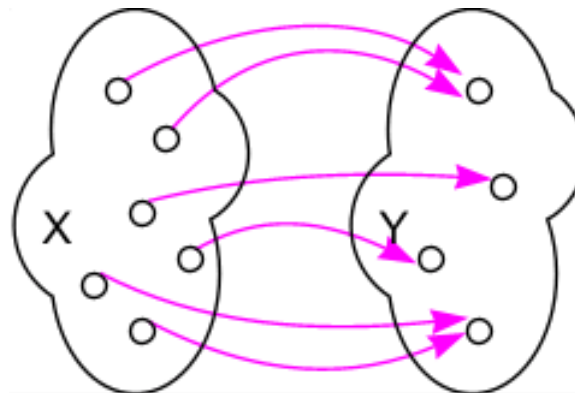
Vom Relationenprodukt erben wir die folgende Eigenschaft:

Satz: Die Komposition von (partiellen) Funktionen ist assoziativ.

Funktionen: Eigenschaften I

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt *surjektiv* oder eine Abbildung von X *auf* Y gdw. ihr Bild- und Wertebereich übereinstimmen, d.h., wenn sie nachtotal ist.

Im Bild:



Surjektive Funktionen

Satz: Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist surjektiv.

(2) $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$.

(3) $\exists g : B \rightarrow A : f \circ g = \Delta_B$.

(4) Es sei C eine weitere Menge und $r, s : B \rightarrow C$ beliebige Funktionen, so gilt die folgende Kürzungsregel: $r \circ f = s \circ f \Rightarrow r = s$.

Surjektive Funktionen—Anmerkungen zum Beweis:

Beweisstrategie: Statt $(1) \iff (2)$, $(1) \iff (3)$ und $(1) \iff (4)$ beweisen wir im *Ringschluss*:

$(1) \implies (2)$, $(2) \implies (3)$, $(3) \implies (4)$, $(4) \implies (1)$.

Die “fehlenden” Implikationen liefert die “Transitivität” der Implikation.

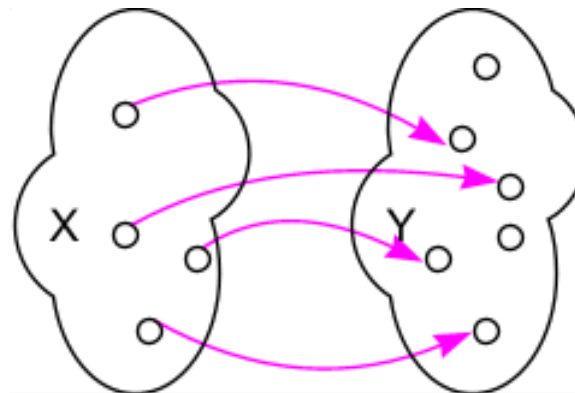
Bei der Implikation $(2) \implies (3)$ machen wir Gebrauch vom *Auswahlaxiom von Zermelo*: Zu jeder Menge \mathcal{M} von nichtleeren Mengen eines Universums \mathcal{U} gibt es eine Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$ mit $f(A) \in A$.

Das Auswahlaxiom ist zum Maximalkettenprinzip äquivalent.

Funktionen: Eigenschaften II

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt *injektiv* oder *eindeutig* wenn die zugehörige Relation voreindeutig ist.

Im Bild:



Injektive Funktionen

Satz: Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1) f ist injektiv.

(2) $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\})$ enthält höchstens ein Element.

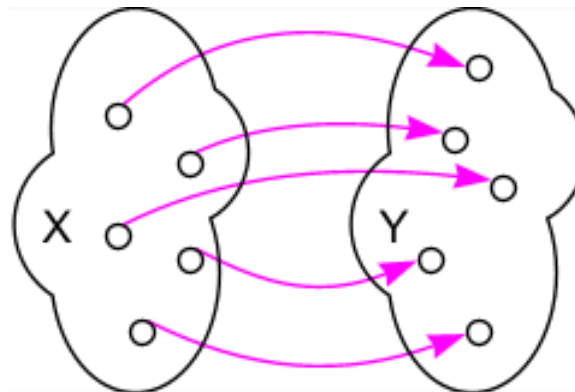
(3) $\exists g : B \rightarrow A : g \circ f = \Delta_A$.

(4) Es sei C eine weitere Menge und $r, s : C \rightarrow A$ beliebige Funktionen, so gilt die folgende Kürzungsregel: $f \circ r = f \circ s \Rightarrow r = s$.

Funktionen: Eigenschaften III

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt *bijektiv*, wenn die zugehörige Relation voreindeutig und rechtstotal ist.

Im Bild:



Bijektive Funktionen

Satz: Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

- (1) f ist bijektiv.
- (2) $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\})$ enthält genau ein Element.
- (3) $\exists g : B \rightarrow A : g \circ f = \Delta_A$ und $f \circ g = \Delta_B$.

Die in (3) beschriebene Inverse heißt auch *Umkehrabbildung*, geschrieben f^{-1} . Mit f ist auch f^{-1} bijektiv, und es gilt: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Bijektive Funktionen—Weitere Aussagen

Satz: (1) Die Komposition von surjektiven Funktionen ist surjektiv.

(2) Die Komposition von injektiven Funktionen ist injektiv.

(3) Die Komposition von bijektiven Funktionen ist bijektiv.

Satz: Ist A endlich und $f : A \rightarrow A$, so sind gleichwertig:

(1) f ist surjektiv, (2) f ist injektiv, (3) f ist bijektiv.