Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

Was wir alles können

Rückblick, Einblick, Ausblick, . . .

$\boxed{\text{Diskrete Strukturen und Logik}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Algebraische Strukturen

Wir können. . .

. . . Mathematikbücher (oder vielleicht noch wichtiger: mathematikträchtige Lehrbücher und Artikel) lesen, insbesondere, wenn in ein behandeltes oder verwandtes Gebiet eingeführt wird.

Beispiel: Das Logik-Buch von Kreuzer/Kühling

Hinweis: Unser Proseminar “Alles Logo” wird vornehmlich mit diesem Buch arbeiten.

Hinweis: Aus Copyright-Gründen wird die Folienreferenz oben bei Ihnen versagen.

Wir können. . .

. . . uns aus Lehrbüchern, die den Stoff unserer Vorlesung betreffen, weitere Übungsaufgaben besorgen und diese erfolgreich bearbeiten.

Beispiel: Das Logik-Buch von Kreuzer/Kühling

Aufgabe 2.1: Herakles heroische Heldentaten
Schon kurz nach der Geburt der Zwillingsbrüder Herakles und Eurystheus entstand ein Streit, wer von den beiden der rechtmäßige Herrscher sei. Dazu wurden die drei bekanntesten Orakel befragt.
Das Ammonion gab bekannt, dass die Orakelsprüche aus Klaros grundsätzlich falsch seien.
Ebenso ließ das Orakel aus Klaros verlauten, dass die Orakelsprüche aus Delphi samt und sonders unzutreffend seien.
Das Orakel aus Delphi jedoch behauptete, sowohl die Sprüche des Ammonions als auch die des Orakels in Klaros seien unwahr.
Wem sollten die armen Griechen nun glauben ?

Noch ein Beispiel: Aufgabe 2.10: Die Geburtstagsfeier

Emil möchte seinen Geburtstag feiern. Leider sind seine Freunde Anne, Bernd, Christine und Dirk recht schwierig.
Und zwar ist es so, dass Anne nur kommt, wenn auch Bernd kommt.
Bernd kommt nur, wenn Christine kommt.
Wenn wiederum Christine kommt, kommt auch Dirk.
Wenn allerdings Bernd und Dirk kommen, kommt Christine nicht.
Dirk kommt nur, wenn Anne oder Bernd kommen.
(a) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die die obige Situation beschreibt.
(b) Zeigen Sie, dass keiner dieser vier Freunde zu Emils Geburtstagsfeier kommt.
Beachte: Normalformen “automatisch” !
Lösung

Eine Rätsel-Erinnerung Gespenster-Knobelei

Können wir das Rätsel auch mengentheoretisch / relational / graphentheoretisch begreifen ?

Noch eine Logelei. . . oder doch Graphentheorie ?

Vier Herren mit den Namen Arzt, Bauer, Fleischer und Schlosser waren von Beruf Arzt, Bauer Fleischer und Schlosser.
Jeder der Herren hatte einen anderen Beruf und keiner den Beruf, den sein Name angab.
Der Fleischer hatte die drei anderen Herren zum Schlachtfest eingeladen.
Herr Schlosser kam kurz nach Herrn Bauer und teilte mit, dass der vierte Herr leider nicht kommen könne, da er zu einem Patienten gerufen wurde.
Welchen Beruf hat Herr Bauer und welchen die anderen drei Herren?

Logik in Aktion: Schaltkreise

Wir entwickeln einen *Addierer*

siehe Meinel / Mundhenk S. 228-230

Tabelle für Summe und Übertrag (*Halbaddierer*):

a	b	u	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Also gilt: $s = s(a,b) = \bar{a}b + a\bar{b}$, $u = u(a,b) = ab$.

Hieraus können wir einen *Volladdierer* basteln wegen:

$S(a,b,u') = s(s(a,b),u')$ und $U(a,b,u') = u(a,b) + u(s(a,b),u')$.

$\boxed{\text{Diskrete Strukturen und Logik}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Algebraische Strukturen

Rekursionsgleichungen

Wir haben verschiedene Möglichkeiten gesehen, um Rekursionsgleichungen aufzulösen.

Zwei davon wollen wir jetzt noch einmal in Beweisen einer etwas allgemeineren Aussage trainieren:
–Raten und dann per Induktion beweisen
–z-Transformation

Problem in der Praxis: Induktionsbeweise lassen sich erst führen, wenn man die Behauptung schon kennt, z-Transformation ist hingegen konstruktiv.

Wer ihr (oder den eigenen Fähigkeiten) misstraut, kann ja immer noch die erhaltene Lösung per Induktion als richtig beweisen.

Rekursionsgleichungen

Satz: Es seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und es habe das *charakteristische Polynom* $p(r) := r^2 - c_1 r - c_2$ zwei verschiedene Nullstellen r_1, r_2.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Lösung (explizite Darstellung) der Rekursionsgleichung

$$a_n = \begin{cases} b_n & , \quad n = 0, 1 \\ c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

gdw. mit $\alpha_i = \frac{(-1)^i (b_0 r_{3-i} - b_1)}{r_1 - r_2}$ für $i = 1, 2$ gilt:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n.$$

<u>Beweis:</u> Wir führen zunächst Induktionsbeweise und überlegen dazu zunächst die Grundfälle:

$$\alpha_1 r_1^0 + \alpha_2 r_2^0 = \frac{(-1)^1 (b_0 r_2 - b_1)}{r_1 - r_2} r_1^0 + \frac{(-1)^2 (b_0 r_1 - b_1)}{r_1 - r_2} r_2^0 = \frac{b_0 (r_1 - r_2) + b_1 - b_1}{r_1 - r_2} = b_0 = a_0$$

$$\alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 = \frac{(-1)^1(b_0 r_2 - b_1)}{r_1 - r_2} r_1^1 + \frac{(-1)^2(b_0 r_1 - b_1)}{r_1 - r_2} r_2^1 = \frac{b_1 r_1 - b_0 r_1 r_2 + b_0 r_1 r_2 - b_1 r_2}{r_1 - r_2} = b_1 = a_1$$

Außerdem überlegen wir uns vorbereitend, dass, da r_i die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind, gilt: [+]
$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ und $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

Für die Implikationsrichtung $\Rightarrow$ führen wir den Induktionsbeweis fort unter der Annahme, die Behauptung gölte für Zahlen kleiner als $n \geq 2$.
Da $n \geq 2$, gilt die Darstellung
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.
Die Induktionsvoraussetzung gilt für $n-1$ und für $n-2$, sodass wir schreiben können:
$a_n = c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2})$, also
$a_n = \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2)$. Mit [+] gilt weiter:
$a_n = \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2$, was zu zeigen war.

Für die umgekehrte Implikationsrichtung rechnen wir mit der Induktionsvoraussetzung aus:
$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2})$, also
$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2)$. Mit [+] gilt weiter:
$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 = a_n$
wegen der expliziten Darstellung $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Dies war zu zeigen.

Rekursionsgleichungen: z-Transformation

Die z-Transformation liefert uns einen anderen Ansatz zum Auflösen von Rekursionen:

1. Schreibe Rekursionsgleichung ohne Fallunterscheidungen:

$$\boxed{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + b_0[n=0] + (b_1 - b_0 c_1)[n=1]}$$

2. Verwandle in Funktionalgleichung:

$$\boxed{A(z) = \sum a_n z^n = \sum (c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + b_0[n=0] + (b_1 - b_0 c_1)[n=1]) z^n}$$

Etwas Algebra liefert:

$$A(z) = zc_1 \cdot (\sum a_{n-1} z^{n-1}) + z^2 c_2 \cdot (\sum a_{n-2} z^{n-2}) + b_0 + (b_1 - b_0 c_1) z.$$

Einsetzen der Definition von $A(z)$ ergibt:

$$A(z) = zc_1A(z) + z^2c_2A(z) + b_0 + (b_1 - b_0c_1)z.$$

Damit haben wir:

$$\boxed{A(z) = \frac{b_0+(b_1-b_0c_1)z}{1-c_1z-c_2z^2}.}$$

3. Partialbruchzerlegung. Nach Voraussetzung sind r_1, r_2 Wurzeln des reflektierten Nennerpolynoms, also gilt:

$$\boxed{A(z) = \frac{\gamma_1}{1-r_1z} + \frac{\gamma_2}{1-r_2z}}$$

für geeignete γ_i. Wegen $\gamma_1(1-r_2z)+\gamma_2(1-r_1z) = (\gamma_1+\gamma_2)-(r_1\gamma_2+r_2\gamma_1)z$ folgt durch Koeffizientenvergleich:

$b_0 = \gamma_1 + \gamma_2$ und $(b_1 - b_0 c_1) = -(r_1\gamma_2 + r_2\gamma_1)$.
Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich leicht auflösen:

$\gamma_1 = b_0 - \gamma_2$ und daher
$0 = (b_1 - b_0 c_1) + (r_2\gamma_1 + r_1\gamma_2) = (b_1 - b_0 c_1) + (r_2(b_0 - \gamma_2) + r_1\gamma_2) = (r_1 - r_2)\gamma_2 + (b_1 - b_0 c_1 + r_2 b_0)$.
Damit ist $\gamma_2 = \frac{-b_1 + b_0 c_1 - r_2 b_0}{r_1 - r_2}$.
Daraus folgt: $\gamma_1 = b_0 - \gamma_2 = \frac{b_0(r_1 - r_2) - (-b_1 + b_0 c_1 - r_2 b_0)}{r_1 - r_2} = \frac{b_0(r_1 - c_1) + b_1}{r_1 - r_2}$.

4. Rücktransformation. Wegen

$$\sum y^i = \frac{1}{1 - y}$$

können wir mit dem Ansatz $y = r_i z$ die Partialbrüche leicht als Summen schreiben:

$$A(z) = \gamma_1 \sum (r_1 z)^n + \gamma_2 \sum (r_2 z)^n = \sum (\gamma_1 r_1^n + \gamma_2 r_2^n) z^n.$$

Koeffizientenvergleich mit $A(z) = \sum a_n z^n$ liefert:

$$a_n = \gamma_1 r_1^n + \gamma_2 r_2^n.$$

Hierbei gilt:

$$\gamma_1 = \frac{b_0(r_1 - c_1) + b_1}{r_1 - r_2},$$

$$\gamma_2 = \frac{-b_1 + b_0 c_1 - r_2 b_0}{r_1 - r_2}.$$

Stimmen die Lösungen, die wir mit der z-Transformation gefunden haben, mit der Behauptung, die im vorigen Satz steht, überein ?

Vergleiche dazu $\gamma_2 = \frac{-b_1+b_0c_1-r_2b_0}{r_1-r_2}$ mit $\alpha_2 = \frac{(b_0r_1-b_1)}{r_1-r_2}$ Die Differenz ist:

$\gamma_2 - \alpha_2 = \frac{-b_1+b_0c_1-r_2b_0-(b_0r_1-b_1)}{r_1-r_2} = \frac{b_0(c_1-r_2-r_1)}{r_1-r_2}$. Warum ist diese gleich Null?

Erinnern wir uns: die r_i sind Nullstellen des Polynoms $p(r) = r^2 - c_1r - c_2$.

Aus der Schule kennen wir noch die Formel zum Auffinden solcher Wurzeln, jedenfalls ungefähr:

$r_1 = \frac{c_1+\sqrt{w}}{2}$ und $r_2 = \frac{c_1-\sqrt{w}}{2}$.

w ist der Term unter der Wurzel, der hier nicht weiter interessiert.

Daher gilt: $c_1 = r_1 + r_2$.

Also gilt: $(c_1 - r_2 - r_1) = 0$, q.e.d. !

Genauso sieht man: $\gamma_1 = \frac{b_0(r_1-c_1)+b_1}{r_1-r_2} = \frac{-b_0r_2+b_1}{r_1-r_2} = \alpha_1$.