Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

$\boxed{\textbf{Prädikatenlogik}}$ — Eine Einführung

Erinnerung: Aussageformen $=$ Prädikate

Beispiel: $P(x) := x > 3$ oder $Q(x, y) := x = y + 3$

(mit einem Zahluniversum, das 3 enthält auf wo $>$ und $+$ definiert sind)

$P(4)$ ist wahr, $P(2)$ ist falsch.

Für jede *Belegung* der Leerstelle x mit einem Wert aus dem gewählten Universum liefert $P(x)$ einen Wahrheitswert, denn damit wird $P(x)$ zu einer Aussage, z.B. $P(2)$ ist die Aussage $2 > 3$.

Prädikatenlogik “$=$” Aussagenlogik, angereichert mit Quantoren.

Universelle Quantifizierung / Allquantifizierung

Beispiel: Durch U.Q. wird aus $P(x) := x > 3$ die Aussage:
$\forall x P(x)$, in Worten: *Für alle* x *gilt* $P(x)$.
Ist diese Aussage wahr oder falsch ?

Abhängig vom zugrunde liegenden Universum X !
X: alle ganzen Zahlen $\rightsquigarrow$ $\forall x P(x)$ ist falsch.
X: alle natürlichen Zahlen $\rightsquigarrow$ $\forall x P(x)$ ist falsch.
X: alle Quadratzahlen größer Eins $\rightsquigarrow$ $\forall x P(x)$ ist wahr.
X: alle komplexen Zahlen $\rightsquigarrow$ $\forall x P(x)$ ist undefiniert.

Universelle Quantifizierung Jargon:

$\forall$: *Allquantor*
$\forall x$: x ist die *quantifizierte Variable*

Ist das Universum X endlich, d.h., ist $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ (Hinweis: Mengenlehre in den folgenden Vorlesungen), so gilt:

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_r).$$

Dann schreibt man auch: $\bigwedge_x P(x)$.

Existentielle Quantifizierung

Beispiel: Durch E.Q. wird aus $P(x) := x > 3$ die Aussage:
$\exists x P(x)$, in Worten: *Es gibt ein x mit* $P(x)$.
Ist diese Aussage wahr oder falsch ?

Abhängig vom zugrunde liegenden Universum X !
X: alle ganzen Zahlen $\rightsquigarrow \exists x P(x)$ ist wahr.
X: alle natürlichen Zahlen $\rightsquigarrow \exists x P(x)$ ist wahr.
X: alle negativen Zahlen $\rightsquigarrow \exists x P(x)$ ist falsch.
X: alle komplexen Zahlen $\rightsquigarrow \exists x P(x)$ ist undefiniert.

Existentielle Quantifizierung Jargon:

$\exists$: *Existenzquantor*
$\exists x$: x ist die *quantifizierte Variable*

Ist das Universum X endlich, d.h., ist $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ (Hinweis: Mengenlehre in den folgenden Vorlesungen), so gilt:

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_r).$$

Dann schreibt man auch: $\bigvee_x P(x)$.

Wann liefern quantifizierte Aussageformen den Wahrheitswert “falsch” ?

Beispiel: Wir haben gesehen:
Für das Universum X aller natürlichen Zahlen gilt:
$\forall x(x > 3)$ ist falsch.

WARUM ?

Wir können ein *Gegenbeispiel* liefern, z.B. $x = 2$.

Allgemein gilt: $\forall x P(x)$ ist falsch gdw. $\exists x \neg P(x)$ ist wahr.
Satz: $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$. (de Morgan)

Wann liefern quantifizierte Aussageformen den Wahrheitswert “falsch” ?

Beispiel: Wir haben gesehen:
Für das Universum X aller negativen ganzen Zahlen gilt:
$\exists x(x > 3)$ ist falsch.

WARUM ?

Wir können kein Beispiel finden, d.h.: $\forall x(x \leq 2)$ ist wahr.

Allgemein gilt: $\exists x P(x)$ ist falsch gdw. $\forall x \neg P(x)$ ist wahr.
Satz: $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$. (de Morgan)

Aussageformen mit mehreren Leerstellen

Wir können dann über einzelne Variablen quantifizieren (*gebundene Variable*); die nicht quantifizierten Variablen heißen auch *frei*.

Beispiel: $P(x, y) := (x^2 + y = 1)$.

$\exists x P(x, y)$ ist Aussageform mit Leerstelle y

$\forall y P(x, y)$

$\forall x \forall y P(x, y)$

$\forall x \exists y P(x, y)$ oder $\forall y \exists x P(x, y)$

$\exists x \forall y P(x, y)$ oder $\exists y \forall x P(x, y)$

$\exists x \exists y P(x, y)$

Wann ist jede der Aussagen wahr, wann falsch ?

Achtung: “$\forall x \exists y \neq \exists y \forall x$”

Beispiel: Eine reelle Zahl a heißt *Grenzwert* einer Folge (a_n) reeller Zahlen gdw.
$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|a_n - a| < \epsilon)$.
In Worten: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle n ...

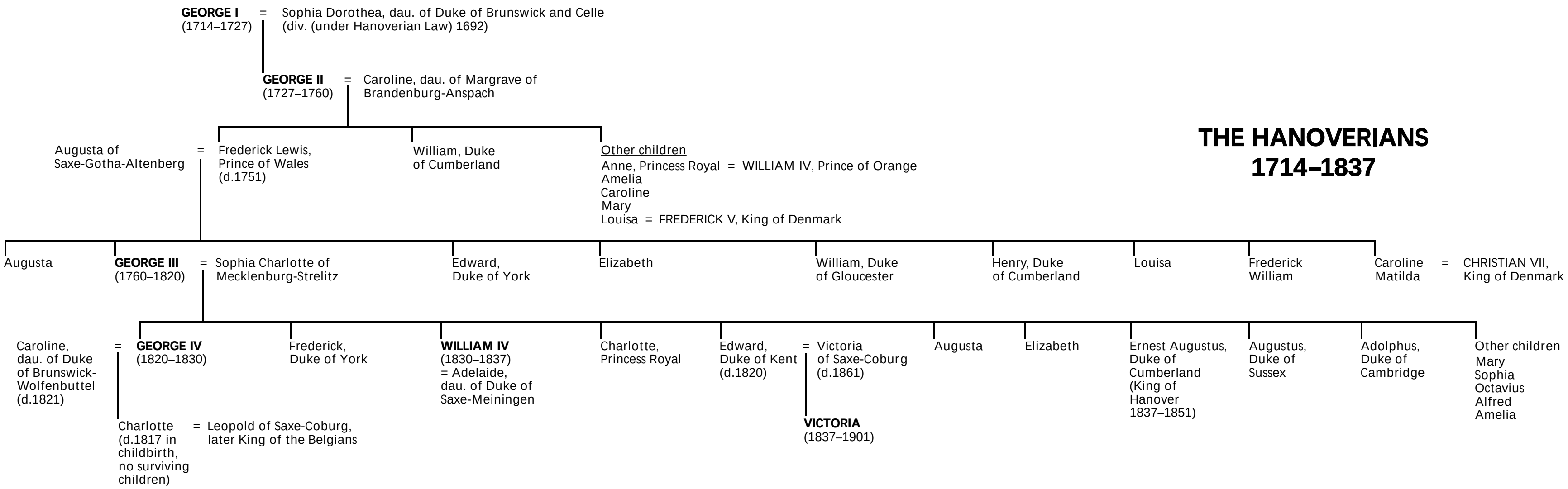
Vertauschen der Quantoren liefert die Aussage:
$\exists n_0 \forall \epsilon > 0 \forall n \geq n_0 (|a_n - a| < \epsilon)$.
In Worten: Es gibt ein n_0, so dass für alle $\epsilon > 0$ und alle n ...
Was bedeutet das ?!

Hinweis: Mit der zweiten Aussage gilt auch die erste !

Anwendung: Wissensbasierte Systeme

Genealogie der englischen Königsfamilie ab George 1

eine mögliche Darstellung: ein “Stammbaum”



Anwendung: Wissensbasierte Systeme

Genealogie der englischen Königsfamilie ab Georg 1 als *Faktenbasis*

```
Elternteil(george1,george2)
Elternteil(george3,george4)
Elternteil(george3,william4)
Elternteil(edward,victoria)
Elternteil(victoria,edward7)
Elternteil(edward7,george5)
Elternteil(george5,edward8)
Elternteil(george5,george6)
Elternteil(george6,elizabeth2)
Elternteil(victoria,alice)
Elternteil(alice,victoriaalberta)
Elternteil(victoriaalberta,alicemountbatten)
Elternteil(alicemountbatten,philip)
```

Anwendung: Genealogie der englischen Königsfamilie: Wer mit wem ?

```
Gattin(sophie,george1)
Gattin(wilhelmina,george2)
Gattin(charlotte,george3)
Gattin(caroline,george4)
Gattin(adelaide,william4)
Gattin(victoria,albert)
Gattin(alexandra,edward7)
Gattin(victoriamaria,george5)
Gattin(elizabethQM,george6)
Gattin(elizabeth2,philip)
```

Anfragen in Anlehnung an PROLOG (Programming in Logic)

(a) `?- Gattin(elizabeth2,philip)`
liefert JA, denn der Eintrag wird in der Faktenbasis gefunden.

(b) `?- Elternteil(sophie,george2)`
liefert NEIN, denn der Eintrag wird NICHT in der Faktenbasis gefunden.
ACHTUNG: Die angefragte Aussage ist wahr, d.h., die Antwort "stimmt eigentlich nicht."
Die *Annahme einer geschlossenen Welt* (closed world assumption CWA) ist eines der Probleme "intelligenter Systeme".

(c) `?- Weiblich(caroline)`
liefert NEIN, denn das Prädikat `Weiblich` ist dem System nicht bekannt.

(d) `?- Gattin(philip,elizabeth2)`
liefert NEIN, da die Argumente nicht vertauschbar sind.

Regeln machen unser System “schlauer”:

Zu (c): Wir können ein Prädikat `Weiblich` einführen und dann sagen:

Wenn es x, y gibt mit $\texttt{Gattin}(x, y)$, **dann** gilt $\texttt{Weiblich}(x)$.

Zu (d) Wir können ein Prädikat `Gatte` einführen:

Wenn es x, y gibt mit $\texttt{Gattin}(x, y)$, **dann** gilt $\texttt{Gatte}(y, x)$.

Alternativ möchten wir vielleicht ein Prädikat `Verheiratet`, gegeben durch:

Wenn es x, y gibt mit $\texttt{Gattin}(x, y)$ oder mit $\texttt{Gatte}(x, y)$, **dann** gilt $\texttt{Verheiratet}(x, y)$.

Damit könnten wir (aber stimmt dies wirklich ?) auch (b) “lösen”:

Wenn es x, y, z gibt mit $\texttt{Verheiratet}(x, y)$ und mit $\texttt{Elternteil}(y, z)$, **dann** gilt $\texttt{Elternteil}(x, z)$.

Zum Abschluss: Noch ein Rätsel …

Ist der folgende Schluss logisch korrekt ?!

(A) Weder Samson noch Freunde von Samson schießen ein Tor.
(B) Entweder schießt Samson ein Tor, oder Johannes schießt ein Tor.
(C) Also ist Johannes kein Freund von Samson.

Formalisierung:
Das Universum X ist eine Fußballmannschaft, aus der namentlich $S =$Samson und $J =$Johannes bekannt sind.
$T(x)$ ist eine Aussageform mit der Bedeutung: x schießt ein Tor.
$F(x, y)$ ist eine Aussageform mit der Bedeutung: x und y sind Freunde.

(A) $\neg(T(S)) \wedge \forall x(F(x, S) \Rightarrow \neg T(x))$
(B) $T(S) \vee T(J)$ (alternative Interpretation: ausschließendes Oder)
(C) $\neg F(J, S)$

Wir haben zu zeigen: Aus (A) und (B) folgt (C).

Zum Abschluss: Noch ein Rätsel ...

(A) $\neg(T(S)) \wedge \forall x(F(x, S) \Rightarrow \neg T(x))$
(B) $T(S) \vee T(J)$ (alternative Interpretation: ausschließendes Oder)
(C) $\neg F(J, S)$

Als Hilfsaussage zeigen wir: Aus (A) und (B) folgt $T(J)$.
Aus (A) folgt durch Vereinfachung: $\neg T(S)$.
Zusammen mit (B) gilt daher: $\neg T(S) \wedge (T(S) \vee T(J))$.
Das Distributivgesetz liefert: $(\neg T(S) \wedge T(S)) \vee (\neg T(S) \wedge T(J))$.
Identitätsgesetz für Oder $\rightsquigarrow \neg T(S) \wedge T(J)$.
Durch Vereinfachung folgt $T(J)$.

Aus dem zweiten Teil der Aussage (A) folgt durch *Spezialisierung*:
$F(J, S) \Rightarrow \neg T(J)$.
Umkehrschluss (und doppelte Negation) liefert: $T(J) \Rightarrow \neg F(J, S)$.
Mit der Hilfsaussage folgt durch modus ponens die Behauptung.