Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Begriffserklärung 

Auf Georg Cantor geht folgende Definition über Mengen (Mannigfaltigkeiten) zurück:

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche *Elemente* der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Die Oper “Cantor — Die Vermessung des Unendlichen” von Ingomar Grünauer widmet sich dem Leben und Werk Georg Cantors; Uraufführung aus Anlass des 1200-jährigen Stadtjubiläums am 10. November 2006 im Opernhaus Halle, siehe dessen Homepage.

Beispiel: $\emptyset$: die *leere Menge*

Schulkasse (als Menge von Schülerinnen und Schülern)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$: die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: die Menge der reellen Zahlen

Warnung vor naivem Zugang: “Menge aller Mengen”

Elementrelation und Angabe von Mengen

Um auszudrücken, das x ein Element der Menge M ist, schreiben wir: $x \in M$.
Anstelle von $\neg(x \in M)$ schreibt man kürzer: $x \notin M$.

Endliche Mengen kann man durch vollzählige Aufzählung ihrer Elemente beschreiben, z.B. eine Schulklasse durch Auflistung der Schüler.
$M = \{\text{Martin}, \text{Michael}, \text{Carla}, \ldots\}$

Allgemein kann man (unter Zugrundelegung eines bekannten Universums) Mengen auch durch Eigenschaften (Aussageformen) beschreiben:
$x \in M \iff P(x)$ notiert man oft auch: $M = \{x \mid P(x)\}$ oder $M = \{x : P(x)\}$.
Das Universum kann bei dieser Schreibweise mit angegeben werden, z.B.:
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = -1\}$.
Die *leere Menge* können wir (unabhängig vom Universum) beschreiben durch:
$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ (oder irgendein anderes Falsum als Eigenschaft)

Mengengleichheit

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind *gleich*, i.Z.: $M_1 = M_2$, gdw.
$x \in M_1 \iff x \in M_2$.
Anstelle von $\neg(M_1 = M_2)$ schreiben wir auch $M_1 \neq M_2$.
Achtung: $\{1, 2, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$,
mehrfache Nennung oder Reihenfolge sind also unerheblich.

Wie beweist man Mengengleichheit ?
(Zumeist) unter Verwendung der Tautologie $p \iff q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
$\rightsquigarrow$ Beweis in zwei Schritten (Richtungen)

Beispiel: “Die leere Menge” hängt nur scheinbar vom Universum ab.
Beweis: Betrachte $\emptyset_U$ und $\emptyset_V$. Wähle $a \in U$ beliebig. Dann gilt $a \notin \emptyset_U$. Also ist $(x \in \emptyset_U \implies x \in \emptyset_V)$ wahr. Die Rückrichtung sieht man entsprechend; vertausche U und V.

Mengenkomplement

Es sei M eine Menge über dem Universum U (das auch als Menge angesehen wird). Das *Komplement* von M, i.Z. $\overline{M}$, ist die Menge $\overline{M} = \{x \mid x \notin M\}$.
Beispiel: $\overline{U} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = U$.
Doppeltes Komplement (ähnlich doppelter Verneinung):
$\overline{\overline{M}} = \{x \mid x \notin \overline{M}\} = \{x \mid \neg(\neg x \in M)\} = \{x \mid x \in M\} = M$.

Sei $M = \{x \mid P(x)\}$.
Mit $P(x)$ ist auch $\neg P(x)$ Aussageform.
Damit gilt: $\overline{M} = \{x \mid \neg P(x)\}$.

M und $\overline{M}$ heißen auch *komplementär* zueinander.
Beispiel: Für $U = \mathbb{Z}$ “sind” die ungeraden Zahlen das Komplement von $\{x : 2|x\}$.

Teilmengen und Obermengen

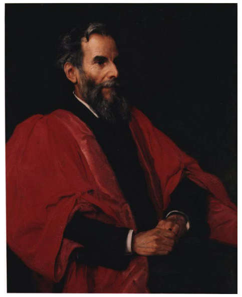
N heißt *Teilmenge* von M ($N \subseteq M$) gdw. M heißt *Obermenge* von N ($M \supseteq N$) gdw. $\forall x(x \in N \Rightarrow x \in M)$.
Gilt überdies $N \neq M$, so sprechen wir von einer *echten Teilmenge* bzw. einer *echten Obermenge* und notieren $N \subset M$ bzw. $M \supset N$.

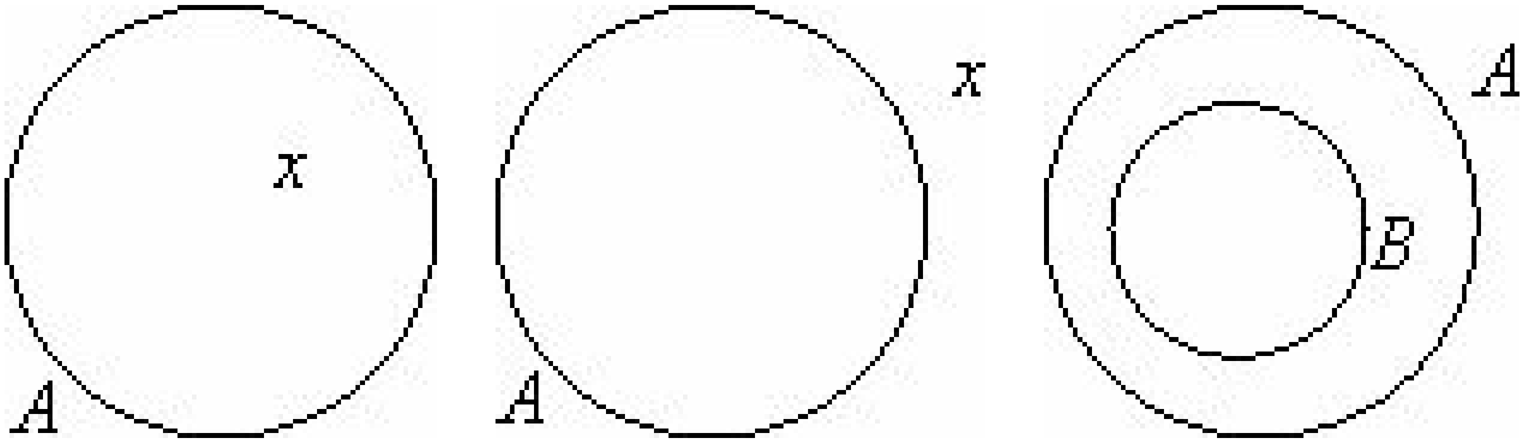
Beispiel: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Satz: $N = M$ gdw. $(N \subseteq M) \wedge (M \subseteq N)$.

Beweis: (*elementweise Argumentation*) $N = M$ gdw. $\forall x(x \in N \iff x \in M)$ gdw.
$\forall x((x \in N \implies x \in M) \wedge (x \in M \implies x \in N))$ gdw.
$\forall x(x \in N \implies x \in M) \wedge \forall x(x \in M \implies x \in N)$ gdw.
$(N \subseteq M) \wedge (M \subseteq N)$.

Venn-Diagramme





Problem: Uneinheitliche Beschriftung

Potenzmengen

Zu jeder Menge M gibt es eine weitere Menge, die *Potenzmenge* von M, geschrieben 2^M (oder auch $\mathcal{P}(M)$), die genau die Teilmengen von M als Elemente enthält.

Lemma: Die Potenzmenge 2^M enthält in Sonderheit die Elemente $\emptyset$ und M.

Beweis: Es bleibt zu zeigen: $\emptyset \in 2^M$, also: $\emptyset \subseteq M$.

Die Implikation $(x \in \emptyset \implies x \in M)$ ist stets wahr, da die Prämisse falsch ist.

Beispiel: $2^{\{1,2,3\}} = \{\, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset \,\}$.

Hasse-Diagramme 

(für endliche Potenzmengen)

Stellt Mengen als Punkte dar.
Mengen mit gleichviel Elementen erscheinen auf einer Ebene.
Oben erscheinen die größeren, unten die kleineren Mengen.
Durch einen (geraden) Strich werden solche Mengen A und B verbunden, für die $A \subset B$ gilt, sich aber kein C findet mit $A \subset C \subset B$.

Beispiel: siehe Tafel...

Nochmal: die natürlichen Zahlen

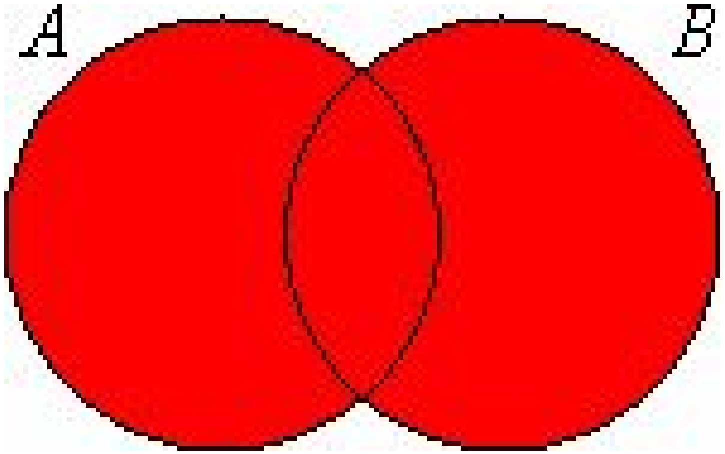
Diese lassen sich mit den bislang besprochenen Mitteln wie folgt (rekursiv) einführen:

- $\emptyset$ ist eine natürliche Zahl.
- Ist n eine natürliche Zahl, so ist ihr Nachfolger $n' = n \cup \{n\}$.

In üblicherer Schreibweise: $\emptyset \sim 0$, $\{\emptyset\} \sim 1$, $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \sim 2$.

Mengenalgebra: Vereinigung

Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums). Die Gesamtheit der Elemente, die zu A oder auch zu B gehören, wird als *Vereinigung* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \cup B$

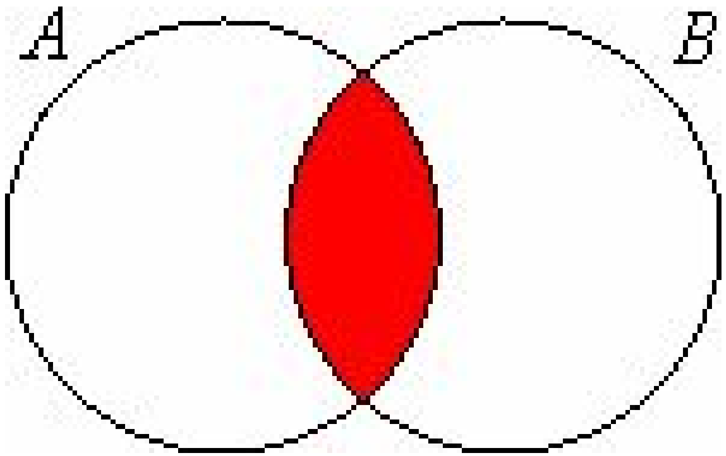
Venn-Diagramm: 

Es gilt: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Mengenalgebra: Durchschnitt

Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums). Die Gesamtheit der Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören, wird als *Durchschnitt* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \cap B$

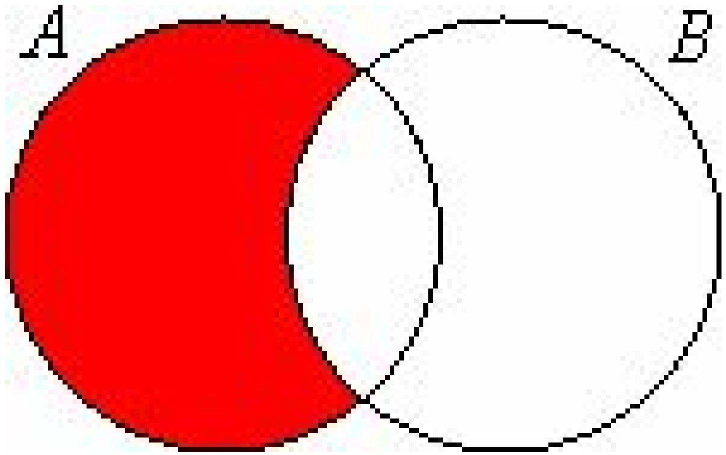
Venn-Diagramm:



Es gilt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
A und B heißen *disjunkt* oder *fremd* gdw. $A \cap B = \emptyset$.

Mengenalgebra: Differenz

Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums). Die Gesamtheit der Elemente, die zwar zu A aber nicht zu B gehören, wird als *Differenz* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \setminus B$, $A - B$

Venn-Diagramm: 

Es gilt: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge \neg x \in B\}$.

Mengenalgebra: Aussagen (Beweise elementweise an der Tafel)

Satz: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$; $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Satz: $A \cup A = A \cap A = A$.

Satz: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

Satz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Satz: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Satz: $(A \cup B = B) \iff A \subseteq B \iff (A \cap B = A)$.

Verallgemeinerte Operationen

Wir können die zweistelligen Operationen Vereinigung und Durchschnitt nicht nur (wegen der Assoziativität und evtl. Kommutativität) als Operationen beliebiger endlicher Stelligkeit begreifen, sondern auch und sogar unendlich viele Mengen vereinigen oder schneiden.

Es sei M eine Menge und $T \subseteq 2^M$.
Definiere

$$\bigcup_{N \in T} N := \{x \in M \mid \exists N \in T(x \in N)\}$$

$$\bigcap_{N \in T} N := \{x \in M \mid \forall N \in T(x \in N)\}$$

Beispiel: $M = \mathbb{Z}$ mit $T = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}, i > 1\}$ und $M_i := \{m \in \mathbb{Z} : 2^i \mid m\}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{N \in T} N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i > 1} M_i = M \qquad \bigcap_{N \in T} N = \emptyset$$

Produktmenge: Ziel und Problem

Ziel: Die *Produktmenge* der Mengen M und N soll aus den *geordneten Paaren* (x, y) von Elementen $x \in M$ und $y \in N$ bestehen.

Frage: Brauchen wir grundsätzlich neue Begriffe, oder können wir diesen Begriff "ableiten" ?

Hinweis: geordnetes Paar $\neq$ Zweiermenge, denn die Reihenfolge ist bei Zweiermengen unerheblich.

Für geordnete Paare soll gelten: $(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d)$.

Für Zweitermengen gilt: $\{a, b\} = \{c, d\} \iff ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c))$.

Produktmenge: Lösung des Problems

Satz: Die Mengen $M_1 = \{\{a\},\{a,b\}\}$ und $M_2 = \{\{c\},\{c,d\}\}$ sind gleich gdw. $a = c$ und $b = d$.

Beweis: $\Rightarrow$: Nach Def. der Mengengleichheit folgt $(*)$ $\{a\} = \{c\}$ und $\{a,b\} = \{c,d\}$, oder aber $(**)$ $\{a\} = \{c,d\}$ und $\{c\} = \{a,b\}$.
Gilt $(*)$, so folgt zunächst $a = c$ und dann damit $b = d$.
Gilt $(**)$, so ist $a = c = d$ sowie $c = a = b$ und somit $a = b = c = d$.

$\Leftarrow$: Mit $a = c$ und $b = d$ gilt: $\{a\} = \{c\}$ und $\{b\} = \{d\}$ und mithin $\{a,b\} = \{c,d\}$.

Wir können also $(a,b) := \{a,\{a,b\}\}$ definieren.

Produktmenge: Weitere Festlegungen

geordnetes n-Tupel (rekursiv für $n > 2$): $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) := ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Beispiel: Geometrie: Punkte der Ebene $\sim$ geordnete Paare;
Punkte des dreidimensionalen Raumes $\sim$ geordnete Tripel, also 3-Tupel

Allgemein definiere das *Mengenprodukt* von Mengen M und N durch:

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$$

Noch allgemeiner:

$$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in M_n\}$$

oder rekursiv:

$$M_1 \times \cdots \times M_n = (M_1 \times \cdots \times M_{n-1}) \times M_n$$

Mengenalgebra mit Produktmengen

Satz: $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset$.

Satz: Für beliebige Mengen M, N, P gilt: $M \times (N \cup P) = (M \times N) \cup (M \times P)$.

Satz: Für beliebige Mengen M, N, P gilt: $M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P)$.

(Distributivgesetze wieder wegen elementweiser Distributivität)