Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Diskrete Strukturen und Logik}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Relationen

Erinnerung: Mengenprodukt

Es seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen.
R heißt *n-stellige Relation zwischen* $M_1, \ldots, M_n$ gdw.

$$R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n.$$

M_i heißen auch *Grundmengen* von R.

Gilt $M = M_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, so heißt R eine *n-stellige Relation über* M.
Schreibweise: $R(x_1, \ldots, x_n)$ statt $(x_1, \ldots, x_n) \in R$
Spezialfall $n = 2$: *binäre Relation* Schreibweise: $x_1 R x_2$ statt $R(x_1, x_2)$ (*Infixnotation*)

Relationen und Prädikate: “$(x_1, \ldots, x_n) \in R$” ist Aussageform mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$
Umgekehrt definieren Aussageformen Relationen.

Relationen: Beispiele

$M_1 = M_2 = M_3 = \mathbb{R}$: *Zwischenrelation* R:

$$R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R} \mid (a \leq b) \wedge (b \leq c)\}.$$

$M_1 = M_2 = \{g \mid g$ ist Gerade in der Ebene $\}$. *Parallelitätsrelation* $\|$:

$$g \| h \iff g \text{ und } h \text{ liegen parallel.}$$

$M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$: *Teilbarkeitsrelation* $|$

$$a \mid b \iff \exists k : b = a \cdot k.$$

$M_1 = M_2 = \mathbb{R}$: *Kleinerrelation* $<$.
$M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$; *Paritätsrelation* P: $(x, y) \in P \iff 2 \mid (x + y)$.

Spezielle Relationen: Betrachte Relationen über Menge M.

Nullrelation: $R = \emptyset$.

Allrelation: $R = M \times M$ (evtl. auch für andere Stelligkeiten)

Gleichheitsrelation, auch *Diagonale* oder *Identitätsrelation*:

$\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$.

Hinweis: Nullrelation und Allrelation auch für Relationen zwischen Mengen gebräuchlich.

Operationen auf Relationen: Mengenoperationen

Sind R und S Relationen zwischen denselben Grundmengen, so sind
$R \subseteq S$, d.h., R ist *Teilrelation* von S,
$\overline{R}$ *Komplementrelation*,
$R \cup S$ und
$R \cap S$ wohldefiniert.

Beispiel: $\overline{\Delta_M}$ ist die *Ungleichheitsrelation*.

Beispiel: Betrachte $< \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\Delta_{\mathbb{R}}$; definiere $\leq := < \cup \Delta_{\mathbb{R}}$.

Beispiel: Betrachte $| \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $| \cap \overline{\Delta_{\mathbb{Z}}}$ beschreibt ...???
Beispiel: Was haben Primzahlen zu tun mit: $| \cap (\overline{\Delta_{\mathbb{Z}}} \cup \overline{\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}})$?

Operationen auf Relationen: Inversenbildung

Es sei $R \subseteq M_1 \times M_2$. Die *Inverse von* oder *Transposition zu* R ist gegeben durch:

$$R^{-} = R^{-1} = R^{T} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Satz: $(R^{-})^{-} = R$.
Satz: $(R \cup S)^{-} = R^{-} \cup S^{-}$.
Satz: $(R \cap S)^{-} = R^{-} \cap S^{-}$.

Beweise siehe Tafel.

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt

Es sei $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.
Das *Relationenprodukt* (die *Komposition*) $R \circ S$ ist wie folgt definiert:
$x(R \circ S)z \iff \exists y(xRy \wedge ySz)$.

Beispiel: $x(| \circ P)z \iff \exists y(x \mid y \wedge (2 \mid (y+z)))$.
Also: $| \circ P = \{(x,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (2 \mid x \implies 2 \mid z)\}$.
Tafel!

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt—Eigenschaften

Satz: (Assoziativität) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
Satz: (Monotonie) $(P \subseteq Q \wedge R \subseteq S) \implies (P \circ R) \subseteq (Q \circ S)$
Satz: Gilt $R \subseteq M \times M$, so ist: $R = R \circ \Delta_M = \Delta_M \circ R$ (Identität).
Satz: $(R \circ S)^{-} = S^{-} \circ R^{-}$.
Satz: ((Sub-)Distributivgesetze)
$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$
$T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$
$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$
$T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$. Warum nicht $=$?
Die (Sub-)Distributivgesetze gelten auch allgemein für unendliche Vereinigungen bzw. Durchschnitte.

Anwendung von Relationen: relationale Datenbanken

(endliche) Relationen als Tabellen: (1) Persönliche Daten (PD)

Matrikel	Name	Vorname	m/w	Geb.datum	Anschrift
4000124	Kramer	Lutz	m	03.06.85	Thebäerstr. 8, Trier
4001031	Ludewig	Marianne	w	07.07.84	Am Weidengraben 95, Trier
4000327	Müller	Bernd	m	06.08.84	Kirchstr. 84, Fell
4001234	Meyer	Manfred	m	13.11.84	M.-Erzberger-Str. 9, Schweich
4000222	Schulz	Christian	m	22.12.84	H.-Reinholz-Str., Konz

Anwendung von Relationen: relationale Datenbanken

(endliche) Relationen als Tabellen: (2) Kursergebnisse (Noten)

Matrikel	Analysis	Programmieren	DSL	AFS	Rechnerstr.
4000124	1,3	2,3	1,7	1,3	3,0
4001031	3,3	2,0	2,3	2,0	1,0
4000327	2,0	2,0	1,7	2,0	2,3
4001234	5,0	4,0	5,0	—	4,0
4000228	2,3	5,0	2,3	—	—

Anwendung: Operationen auf relationalen Datenbanken

1. *Projektion* (project): Spaltenauswahl

2. *select*: Zeilenauswahl (gemäß gewisser Kriterien)

3. *join*: verbindet zwei Tabellen

Anwendung: Projektion

Beispiel: Auswahl aller Matrikelnummern, Vornamen, Namen und Anschriften aus PD liefert: R_1

Matrikel	Vorname	Name	Anschrift
4000124	Lutz	Kramer	Thebäerstr. 8, Trier
4001031	Marianne	Ludewig	Am Weidengraben 95, Trier
4000327	Bernd	Müller	Kirchstr. 84, Fell
4001234	Manfred	Meyer	M.-Erzberger-Str. 9, Schweich
4000222	Christian	Schulz	H.-Reinholz-Str., Konz

Anwendung: Selektion

Beispiel: Auswahl aller Matrikelnummern von Studenten, die DSL mindestens mit 2,0 bestanden haben (aus Tabelle Noten) liefert: R_2

Matrikel	Analysis	Programmieren	DSL	AFS	Rechnerstr.
4000124	1,3	2,3	1,7	1,3	3,0
4000327	2,0	2,0	1,7	2,0	2,3

Noch deutlicher wird das Ergebnis durch anschließende Projektion auf Matrikel und DSL (R_3):

Matrikel	DSL
4000124	1,7
4000327	1,7

Anwendung: join

Beispiel: Sämtliche Studenten, die DSL mit mindestens 2,0 bestanden haben, sollten angeschrieben werden. Dazu bilde den Join von R_1 und R_3:

Matrikel	Vorname	Name	Anschrift	DSL
4000124	Lutz	Kramer	Thebäerstr. 8, Trier	1,7
4000327	Bernd	Müller	Kirchstr. 84, Fell	1,7

Vor dem ersten Doppelstrich stehen die gemeinsamen Attribute, dann folgen die Attribute aus R_1 und dann die aus R_3.

Diskussion: Gemeinsamkeiten / Unterschiede der Relationenbegriffe bei den Datenbanken und “bei uns” ?

Eigenschaften von binären Relationen

Es sei R eine binäre Relation über M.

R heiße *reflexiv* gdw. $\forall x \in M(xRx)$.
R heiße *symmetrisch* gdw. $\forall x, y \in M(xRy \implies yRx)$.
R heiße *antisymmetrisch* gdw. $\forall x, y \in M((xRy \land yRx) \implies x = y)$.
R heiße *transitiv* gdw. $\forall x, y, z \in M((xRy \land yRz) \implies xRz)$.
R heiße *nacheindeutig* (oder *rechtseindeutig*) gdw. $\forall x, y, z \in M((xRy \land xRz) \implies y = z)$.
R heiße *vortotal* (oder *linkstotal*) gdw. $\forall x \in M \exists y \in M(xRy)$.

Beispiel: Die einzige Relation R, die alle soeben eingeführten Eigenschaften erfüllt, ist die Gleichheitsrelation. Gilt nämlich xRy, so auch yRx (Symm.) und somit $x = y$ (Antisymm.)

Eigenschaften von binären Relationen—Weitere Beispiele

$R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$? r, s, a, t, n, v

Teilerrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$? r, s, a, t, n, v (0!)

Geradeneigenschaft: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x\}$

Kreiseigenschaft: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Hinweis: “Nicht symmetrisch” ist nicht gleichbedeutend mit “antisymmetrisch”.

Hinweis: Entsprechend definierbar: *voreindeutig*, *linkseindeutig*, *nachtotal*, *rechtstotal*; anstelle von “total” spricht man auch von “vollständig”.

Eigenschaften von binären Relationen—Einfache Aussagen

Es sei R eine Relation über M.

Satz: R ist reflexiv gdw. $\Delta_M \subseteq R$.

Satz: R ist symmetrisch gdw. R^- ist symmetrisch gdw. $R^- \subseteq R$ gdw. $R^- = R$.

Satz: R ist transitiv gdw. $R \circ R \subseteq R$.

Satz: R ist antisymmetrisch gdw. $R \cap R^- \subseteq \Delta_M$.

Abschluss von binären Relationen

Es sei R eine binäre Relation über M und P sei eine Eigenschaft von Relationen. Die Relation R_P^* über M heißt *Abschluss* oder *Hülle* von R bezüglich P, gdw.:

1. R_P^* besitzt die Eigenschaft P, kurz: $P(R_P^*)$.
2. $R \subseteq R_P^*$.
3. Für alle Relationen S, $R \subseteq S$ gilt: $P(S) \Rightarrow R_P^* \subseteq S$.

Hinweis: Alternative Schreibweise:

$$R_P^* = \bigcap_{S \subseteq M \times M : R \subseteq S \wedge P(S)} S.$$

Spezielle Abschlüsse von R über M

Satz: Die reflexive Hülle von R ist $R \cup \Delta_M$.

Satz: Die symmetrische Hülle von R ist $R \cup R^-$.

Schreibweise: *transitive Hülle* R^+, *reflexive transitive Hülle* $R^* = (R \cup \Delta_M)^+$.

Ein wichtiger Satz über transitive Hüllen

Die *Potenz einer Relation* R über M kann man rekursiv wie folgt festlegen:

$$R^n := \begin{cases} \Delta_M & , \quad n = 0 \\ R^{n-1} \circ R, & n > 0 \end{cases}$$

Lemma: $R^* = R^+ \cup \Delta_M$.

Satz: $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$; $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.

Ein wichtiger Satz über transitive Hüllen

Satz: $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$; $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.

Beweis: Zeige: $\bigcup R^n$ ist transitiv (Übung) $\rightsquigarrow \supseteq \checkmark$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis:

Angenommen, es gäbe ein $(x, y) \in \bigcup_{n \geq 1} R^n$ mit $(x, y) \notin R^+$. $[+]$.

Dann gibt es ein n mit $(x, y) \in R^n$.

Wähle unter allen (x, y) mit $[+]$ ein festes (x, y) mit minimalem $n \geq 1$, sodass $(x, y) \in R^n$.

Da $R = R^1 \subseteq R^+$, gilt $n \geq 2$.

$(x, y) \in R^n$ bedeutet: es gibt z mit $(x, z) \in R^{n-1}$, $(z, y) \in R$.

Da n minimal, gilt $(x, z) \in R^+$ und wegen $(z, y) \in R \subseteq R^+$ folgt $(x, y) \in R^+$, da R^+ transitiv.

Widerspruch !

Hinweis: Für Relationen R über endliche M haben wir also Algorithmus zur Berechnung von R^+ !