

# Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau

Universität Trier

fernau@uni-trier.de

# Diskrete Strukturen und Logik

## Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

## Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

## Funktionen

Eine *partielle Funktion*  $F$  ist eine nacheindeutige binäre Relation zwischen  $A$  und  $B$ .

Eine partielle Funktion  $F$  heißt *total* oder einfach *Funktion* oder *Abbildung* gdw.  $F$  ist linkstotal.

Schreibweise:  $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$

$f(a)$  *Bild* von  $a$  bei  $f$ ;  $a$  *Urbild*;

$A$ : *Definitionsbereich*,

$B$ : *Wertebereich*

$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B : f(a) = b\}$  *Urbildbereich*

$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$  *Bildbereich*

**Satz:** Eine Funktion ist total gdw. ihr Definitions- und Urbildbereich stimmen überein.

## Funktionen: Beispiele

**Beispiel:** Die Diagonale ist eine totale Funktion.

**Beispiel:** Die Vorschrift, die jedem Studenten der Universität Trier seine DSL-Note zuordnet, ist eine partielle Funktion.

**Beispiel:** Die Relation, die sämtlichen Elementen aus  $A$  stets dasselbe Element aus  $B$  zuordnet, ist eine totale Funktion, genannt *konstante Funktion*.

**Beispiel:** Ist  $A \subseteq B$ , so kann man die Diagonale  $\Delta_A$  auch als Abbildung  $\iota : A \rightarrow B$  auffassen: diese heißt auch *natürliche Einbettung*. Für  $A = \emptyset$  spricht man von der *leeren Abbildung*.

## Funktionen und Äquivalenzrelationen

**Satz:** Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion. Dann definiert  $x \sim_f y$  gdw.  $f(x) = f(y)$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ .

**Satz:** Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ . Es bezeichne  $[a]$  die  $\sim$ -Äquivalenzklasse von  $a$ .  $f_{\sim} : A \rightarrow A/\sim, a \mapsto [a]$  ist eine Abbildung.

**Satz:** Mit den Bezeichnungen der voranstehenden Sätze gilt:

$$\sim = \sim_{f_{\sim}} \quad \text{und} \quad f = f_{\sim_f}$$

**Beispiele** and der Tafel.

## Funktionen und Verknüpfungen

Eine ( $n$ -stellige) *Verknüpfung* oder *Operation* auf einer Grundmenge  $M$  ist eine Funktion  $f : M^n \rightarrow M$ .

Erinnerung:  $M^n$  bezeichnet das  $(n - 1)$ -fache kartesische Produkt von  $M$  mit sich selbst.

Speziell: zweistellige Verknüpfungen schreibt man meist in Infixnotation.

**Beispiel**: Auf der Menge  $B = \{w, f\}$  sind die Junktoren  $\vee, \wedge$  zweistellige Verknüpfungen.

Einstellige Verknüpfungen sind “normale” Abbildungen  $M \rightarrow M$ .  
Nullstellige Verknüpfungen bezeichnen Konstanten in  $M$ .

## Mengenfunktionen

Es sei  $R \subseteq A \times B$  eine Relation (z.B. auch eine (partielle) Funktion).

Diese kann man auch als Mengenfunktionen deuten:

$$R_1 : 2^A \rightarrow 2^B, X \mapsto \{y \in B \mid \exists x \in X (x, y) \in R\}$$

$$R_2 : 2^B \rightarrow 2^A, Y \mapsto \{x \in A \mid \exists y \in Y (x, y) \in R\}$$

**Satz:**  $R_1(A_1 \cup A_2) = R_1(A_1) \cup R_1(A_2)$ . (entsprechend für  $R_2$ )

**Satz:**  $R_1(A_1 \cap A_2) \subseteq R_1(A_1) \cap R_1(A_2)$ . (entsprechend für  $R_2$ )

Ist  $R$  durch eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  gegeben, schreibt man auch  $f(X)$  statt  $R_1(X)$ , und  $f^{-1}(Y)$  statt  $R_2(Y)$ .

**Satz:**  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

## Komposition von Funktionen

**Satz:** Sind  $R$  und  $S$  nacheindeutige Relationen über  $M$ , so auch  $R \circ S$ .

**Satz:** Sind  $R$  und  $S$  vortotale Relationen über  $M$ , so auch  $R \circ S$ .

Das Relationenprodukt wird im Falle (partieller) Funktionen auch oft als *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* angesprochen.

Vom Relationenprodukt erben wir die folgende Eigenschaft:

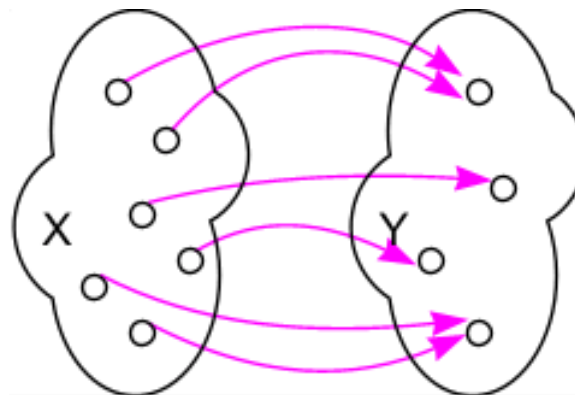
**Satz:** Die Komposition von (partiellen) Funktionen ist assoziativ.

**ACHTUNG:** Veränderte Reihenfolge bei Komposition von Funktionen gegenüber Meinel/Mundhenk, d.h.:  $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ .

## Funktionen: Eigenschaften I

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt *surjektiv* oder eine Abbildung von  $X$  *auf*  $Y$  gdw. ihr Bild- und Wertebereich übereinstimmen, d.h., wenn sie nachtotal ist.

Im Bild:



## Surjektive Funktionen

**Satz:** Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1)  $f$  ist surjektiv.

(2)  $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ .

(3)  $\exists g : B \rightarrow A : g \circ f = \Delta_B$ .

(4) Es sei  $C$  eine weitere Menge und  $r, s : B \rightarrow C$  beliebige Funktionen, so gilt die folgende Kürzungsregel:  $f \circ r = f \circ s \Rightarrow r = s$ .

## Surjektive Funktionen—Anmerkungen zum Beweis:

**Beweisstrategie:** Statt  $(1) \iff (2)$ ,  $(1) \iff (3)$  und  $(1) \iff (4)$  beweisen wir im *Ringschluss*:

$(1) \implies (2)$ ,  $(2) \implies (3)$ ,  $(3) \implies (4)$ ,  $(4) \implies (1)$ .

Die “fehlenden” Implikationen liefert die “Transitivität” der Implikation.

Bei der Implikation  $(2) \implies (3)$  machen wir Gebrauch vom *Auswahlaxiom von Zermelo*: Zu jeder Menge  $\mathcal{M}$  von nichtleeren Mengen eines Universums  $\mathcal{U}$  gibt es eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$  mit  $f(A) \in A$ .

Das Auswahlaxiom ist zum Maximalkettenprinzip äquivalent.

## Einzelheiten zum Beweis

(1)  $\Rightarrow$  (2):  $f$  surj.  $\leadsto f(A) = B$ , d.h., für  $b \in B$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ , also  $f^{-}(\{b\}) \neq \emptyset$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Mit dem Auswahlaxiom können wir uns wegen  $f^{-}(\{b\}) \neq \emptyset$  zu jedem  $b \in B$  ein  $g(b) \in f^{-}(\{b\})$  auswählen; es gilt nach Def.:  $f(g(b)) = b$ .

Damit gilt:  $(g \circ f)(b) = f(g(b)) = b$  für alle  $b \in B$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4): Betrachte zwei bel. Abb.  $r, s : B \rightarrow C$  mit  $f \circ r = f \circ s$ .

Wegen (3) gibt es  $g : B \rightarrow A : g \circ f = \Delta_B$ . Mit der Assoziativität der Komposition folgt:

$$r = \Delta_B \circ r = (g \circ f) \circ r = g \circ (f \circ r) = g \circ (f \circ s) = (g \circ f) \circ s = \Delta_B \circ s = s.$$

(4)  $\Rightarrow$  (1) mit Kontraposition: Annahme,  $f$  ist nicht surjektiv, d.h., es gibt ein  $b_0 \in B \setminus f(A)$ .

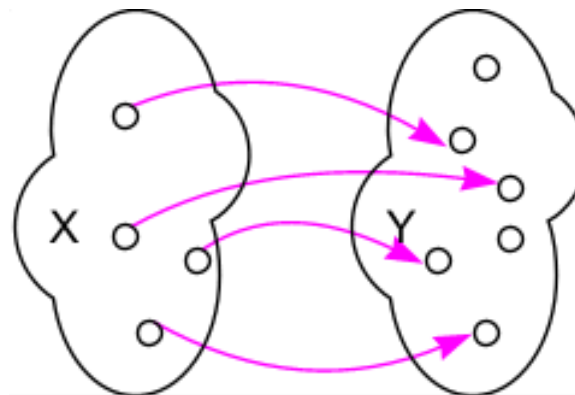
Für  $C = \{0, 1\}$  betrachte Abbildungen  $r, s : B \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $r(b) = s(b) = 0$  für alle  $b \neq b_0$  und  $r(b_0) = 0$  und  $s(b_0) = 1$ .

Offenbar gilt  $r \neq s$ , aber sehr wohl  $f \circ r = f \circ s$ , da der Unterschied außerhalb von  $f(A)$  auftritt.

## Funktionen: Eigenschaften II

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt *injektiv* oder *eineindeutig* wenn die zugehörige Relation voreindeutig ist.

Im Bild:



## Injektive Funktionen

**Satz:** Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1)  $f$  ist injektiv.

(2)  $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\})$  enthält höchstens ein Element.

(3)  $\exists g : B \rightarrow A : f \circ g = \Delta_A$ .

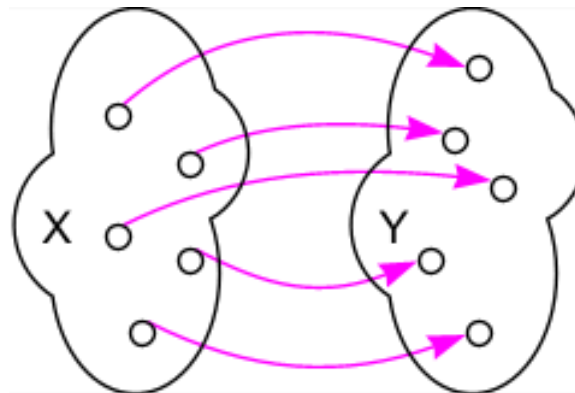
(4) Es sei  $C$  eine weitere Menge und  $r, s : C \rightarrow A$  beliebige Funktionen, so gilt die folgende Kürzungsregel:  $r \circ f = s \circ f \Rightarrow r = s$ .

Beweis ähnlich zur Surjektivität.

## Funktionen: Eigenschaften III

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt *bijektiv*, wenn die zugehörige Relation voreindeutig und rechtstotal ist.

Im Bild:



## Bijektive Funktionen

**Satz:** Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

- (1)  $f$  ist bijektiv.
- (2)  $\forall b \in B : f^{-1}(\{b\})$  enthält genau ein Element.
- (3)  $\exists g : B \rightarrow A : g \circ f = \Delta_B$  und  $f \circ g = \Delta_A$ .

Die in (3) beschriebene Inverse heißt auch *Umkehrabbildung*, geschrieben  $f^{-1}$ .  
Mit  $f$  ist auch  $f^{-1}$  bijektiv, und es gilt:  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

## **Bijektive Funktionen**—Weitere Aussagen

**Satz:** (1) Die Komposition von surjektiven Funktionen ist surjektiv.

(2) Die Komposition von injektiven Funktionen ist injektiv.

(3) Die Komposition von bijektiven Funktionen ist bijektiv.

**Satz:** Ist  $A$  endlich und  $f : A \rightarrow A$ , so sind gleichwertig:

(1)  $f$  ist surjektiv, (2)  $f$  ist injektiv, (3)  $f$  ist bijektiv.

**Satz:** Ist  $A$  endlich und  $f : A \rightarrow A$ , so sind gleichwertig:  
(1)  $f$  ist surjektiv, (2)  $f$  ist injektiv, (3)  $f$  ist bijektiv.

Beweis: Wir (nur) zeigen die Aussage:  $\forall n$ : Ist  $A$  Menge mit  $n$  Elementen und  $f : A \rightarrow A$  surjektiv, so ist  $A$  injektiv.

Für  $n = 0, 1$  sind die Aussagen offenbar richtig.

IV: Die Aussage gilt für alle Mengen mit weniger als  $n$  Elementen.

Betrachte Menge  $A$  mit  $n > 1$  Elementen und Surjektion  $f : A \rightarrow A$ .

Wäre  $f$  nicht injektiv, so gäbe es  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$  mit  $f(a) = f(b)$ .

Da  $f$  surjektiv, gibt es  $c$  mit  $f(c) = a$ .

Gilt  $c \neq a$ , so wäre  $f'$  mit (1)  $f'(x) = f(x)$  ausgenommen (2)  $f'(a) = a$  sowie  $f'(c) = f(b)$  und (3)  $f'(y) = y$  für  $y \neq c$  mit  $f(y) = a$  ebenfalls eine Surjektion, die nicht injektiv ist.

(Falls  $c = a$ , so vertausche die Rollen von  $a$  und  $b$ .)

Es gibt also ein solches Beispiel mit  $f'(z) = a$  gdw.  $x = a$ .

Nach IV ist die wohldefinierte Einschränkung von  $f'$  auf  $A \setminus \{a\}$  eine Surjektion, die ebenfalls Injektion ist. Damit wäre dann aber auch  $f'$  auf  $A$  eine Injektion.