Formale Sprachen

(parallele und regulierte Ersetzung)

SoSe 2007 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Formale Sprachen}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches / Einführung
  Motivation / Erinnerung / Fragestellungen

- Diskussion verschiedener Sprachklassen:
  gesteuerte Ersetzungsverfahren
  parallele Ersetzungsverfahren

- Algebraische Ansätze:
  abstrakte Sprachfamilien
  formale Potenzreihen

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext

Eine *(kontextfreie) Grammatik mit wahlfreiem Kontext (mit Vorkommenstest)* ist gegeben durch

$$G = (N, \Sigma, P, S),$$

wobei

- N: Nichtterminalalphabet,
- Σ: Terminalalphabet,
- $S \in N$: Startsymbol und
- P: endliche Menge von Regeln der Form

  $$(A \to w, Q, R)$$

  mit

  - $A \to w$ ist kontextfrei, d.h., $A \in N$ und $w \in (N \cup \Sigma)^*$,
  - $Q \subseteq N$ ist der *gestattende Kontext* und
  - $R \subseteq N$ ist der *verbietende Kontext*.

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext: Ableitungsbegriff

$x \Rightarrow y$ gdw. $\exists x', y' \in V_G^* \exists (\alpha \to \beta, Q, R) \in P:$

- $x = x'\alpha x'' \wedge y = x'\beta x''$.
- Alle $B \in Q$ kommen in $x'x''$ vor.
- Kein $B \in R$ kommt in $x'x''$ vor.

Wie üblich: $L(G) = \{w \in T^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$.

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext: Beispiele

$G = (\{A, B, C, S, A', B', C'\}, \{a, b, c\}, P, S)$; P enthält folgende Regeln:

$(S \to ABC, \emptyset, \emptyset)$

$(A \to aA', \{B, C\}, \emptyset)$	$(B \to bB', \{C, A'\}, \emptyset)$	$(C \to cC', \{A', B'\}, \emptyset)$
$(A' \to A, \{B', C'\}, \emptyset)$	$(B' \to B, \{C', A\}, \emptyset)$	$(C' \to C, \{A, B\}, \emptyset)$
$(A \to a, \{B, C\}, \emptyset)$	$(B \to b, \{C\}, \emptyset)$	$(C \to c, \emptyset, \emptyset)$

Welche Sprache $L(G)$ wird beschrieben ? (hierzu Beweisskizze an der Tafel)

Kann man auf die blauen Einschränkungen verzichten, ohne die Sprache zu verändern ?

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext: Beispiele

$G = (\{A, B, C, S\}, \{a\}, P, S)$; P enthält folgende Regeln:

$(S \to AA, \emptyset, \{B, C\})$ $\quad (A \to B, \emptyset, \{S, C\})$ $\quad (B \to S, \emptyset, \{A, C\})$

$(A \to C, \emptyset, \{S, B\})$ $\quad (C \to a, \emptyset, \{S, A, B\})$

Welche Sprache $L(G)$ wird beschrieben ?

Sprachklassen:

– $\mathcal{L}(\mathrm{RC}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ac})$ allgemein, mit Vorkommenstest

– $\mathcal{L}(\mathrm{RC}, \mathrm{CF}[-\lambda])$ ohne Vorkommenstest (stets $R = \emptyset$)

– $\mathcal{L}(\mathrm{fRC}, \mathrm{CF}[-\lambda])$ (nur) mit verbietendem Vorkommenstest (stets $Q = \emptyset$)

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext: Beschreibungsmächtigkeit

Satz 1: $\mathcal{L}(\mathrm{RC}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ac}) = \mathcal{L}(\mathrm{P}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ac})$.

Satz 2: $\mathcal{L}(\mathrm{CF}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{RC}, \mathrm{CF}[-\lambda]) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{P}, \mathrm{CF}[-\lambda]) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{P}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ac})$.

Satz 3: $\mathcal{L}(\mathrm{CF}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{fRC}, \mathrm{CF}[-\lambda]) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{P}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ut}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{P}, \mathrm{CF}[-\lambda], \mathrm{ac})$.

Grammatiken mit wahlfreiem Kontext: Beweisideen und Hinweise

Satz 1: $\subseteq$ "sequentielles Überprüfen"; $\supseteq$ explizites Mitführen der Zustandsinformation in der Satzform. Vorkommenstest ist auch notwendig, um (nur) einmaliges Anwenden der kontextfreien Regel zu gewährleisten.

Satz 2: Achtung Echtheit der Inklusion unbekannt

Satz 3: Abschlusseigenschaften:
Lemma: $\mathcal{L}(\text{fRC}, \text{CF}[-\lambda])$ ist gegen [nicht-löschende] Morphismen und gegen Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen.
Folgerung: fRC-Grammatiken haben entscheidbares Leerheitsproblem.
$\rightsquigarrow \mathcal{H}(\mathcal{L}(\text{fRC}, \text{CF}[-\lambda]))$ ist entscheidbar im Ggs. zu $\mathcal{H}(\mathcal{L}(\text{P}, \text{CF}[-\lambda], \text{ut}))$.

Geordnete Grammatiken

$G = (N, \Sigma, P, S, \prec)$ mit $\prec$ Halbordnung auf P.
$A \to w$ ist nur dann anwendbar, wenn keine Regel $B \to v$ anwendbar ist mit $(A \to w) \prec (B \to v)$.

Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
1: S \to AB & 2: A \to aA' & 3: A \to A'' & 4: A \to F \\
5: B \to bB'c & 6: B \to bc & 7: B \to F & 8: A' \to A \\
9: A' \to F & 10: A'' \to a & 11: A'' \to F & 12: B' \to B \\
13: B'' \to F & & &
\end{array}
$$

Halbordnung: $2, 3 \prec 13$; $6, 12 \prec 9$; $8, 10 \prec 7$; $5, 6 \prec 4$; $5 \prec 11$
Beobachte: Auf Satzform $a^r A b^r B c^r$ ist nur $A \to A''$ und $A \to aA'$ erfolgreich anwendbar.

Aufgabe: Geordnete Grammatik für $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Geordnete Grammatiken: Eigenschaften

Satz: $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\text{fRC}, \text{CF}[-\lambda])$ gdw. $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathrm{G})$ für eine geordnete Grammatik G [ohne λ-Regeln].

Satz: $\mathcal{L}(\text{fRC}, \text{CF}[-\lambda])$ ist abgeschlossen gegen beliebige [nicht-löschende] Morphismen, inverse Morphismen, Durchschnitt mit regulären Sprachen, Vereinigung, Kleene-Stern und Konkatenation.