

# Näherungsalgorithmen (Approximationsalgorithmen)

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau

Universität Trier

[fernau@informatik.uni-trier.de](mailto:fernau@informatik.uni-trier.de)

# Näherungsalgorithmen

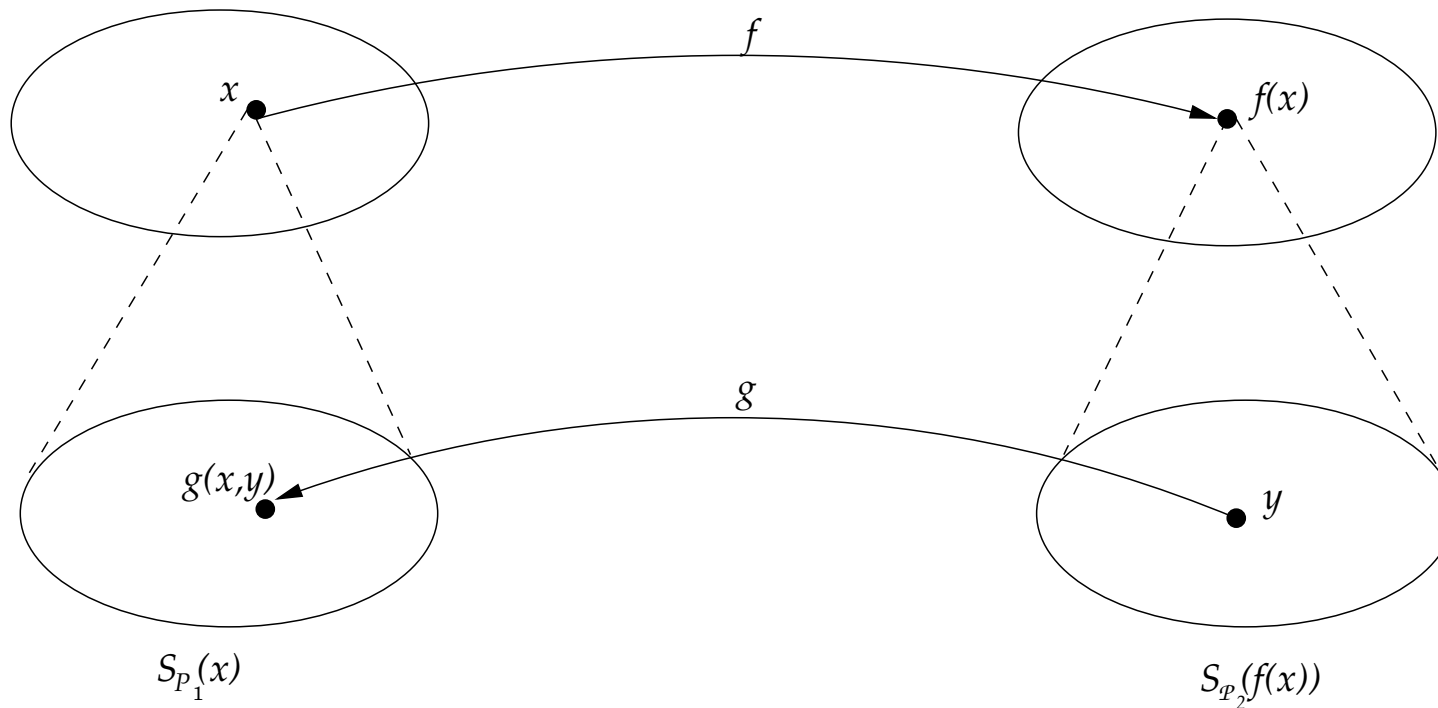
Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

## Approximationstheorie

- Absolute Approximation
- Relative Approximation: die Klasse APX
- Polynomzeit-Approximationsschemata PTAS
- Zwischen APX und NPO
- Zwischen PTAS und APX
- Approximationsklassen und Reduktionen

## Schema einer AP-Reduktion



## Approximationserhaltene Reduktionen

Betrachte  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{NPO}$ ,  $\mathcal{P}_1$  heißt *näherungserhaltend* auf  $\mathcal{P}_2$  *reduzierbar*, kurz  $\mathcal{P}_1$  ist *AP-reduzierbar* (AP bedeutet ausgeschrieben „approximation preserving“) auf  $\mathcal{P}_2$ , in Zeichen  $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$ , wenn es zwei Abbildungen  $f, g$  gibt und eine Konstante  $\alpha \geq 1$  derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) : f(x, r) \in I_{\mathcal{P}_2}$ .
2.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) : S_{\mathcal{P}_1}(x) \neq \emptyset \rightarrow S_{\mathcal{P}_2}(x)(f(x, r)) \neq \emptyset$ .
3.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) \forall y \in S_{\mathcal{P}_2}(f(x, r)) : g(x, y, r) \in S_{\mathcal{P}_1}(x)$ .
4.  $f, g$  sind durch Algorithmen  $\mathcal{A}_f, \mathcal{A}_g$  berechenbar, deren Laufzeit polynomiell ist für jedes feste  $r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty)$ .
5.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) \forall y \in S_{\mathcal{P}_2}(f(x, r)) :$

$$R_{\mathcal{P}_2}(f(x, r), y) \leq r \rightarrow R_{\mathcal{P}_1}(x, g(x, y, r)) \leq 1 + \alpha(r - 1)$$

Ein einfaches **Beispiel** für eine AP-Reduktion liefern MAXCLIQUE und MAX-IS durch Übergang auf den Komplementgraphen; die Clique wird so zur unabhängigen Menge.

**Satz:** Betrachte  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \in \text{NPO}$ .

1. Gilt  $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$  und  $\mathcal{P}_2 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_3$ , so auch  $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_3$  (Transitivität)
2. Gilt  $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$  und  $\mathcal{P}_2 \in \text{APX}$ , so folgt  $\mathcal{P}_1 \in \text{APX}$ .
3. Gilt  $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$  und  $\mathcal{P}_2 \in \text{PTAS}$ , so folgt  $\mathcal{P}_1 \in \text{PTAS}$ .

Wegen dem Satz ist die folgende Definition sinnvoll: Es sei  $C \subseteq \text{NPO}$ .  
Ein Problem  $\mathcal{P} [\in \text{NPO}]$  heißt *C-hart*, wenn für jedes  $\mathcal{P}' \in C$  gilt:

$$\mathcal{P}' \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}.$$

Ein C-hartes Problem heißt *C-vollständig*, wenn es in  $C$  liegt.

In der Literatur werden verschiedene Reduktionsbegriffe für Approximationsprobleme betrachtet. Entsprechend gibt es auch verschiedene Härte- und Vollständigkeitsbegriffe. Näheres dazu im Buch von Ausiello et al., Kapitel 8. Im Folgenden werden wir noch einige konkrete AP-Vollständigkeitsbegriffe diskutieren. Dadurch wird auch der Umgang mit AP-Reduktionen geübt.

## EXP-APX-Vollständigkeit

Der Unterschied zwischen EXP-APX und NPO besteht darin, dass für NPO-Probleme  $\mathcal{P}$  die Menge  $S_{\mathcal{P}}(x)$  für jede Instanz  $x$  NP-hart sein darf (und in den vorigen Beispielen für NPO-vollständige Probleme auch war).

Dadurch, dass man „künstlich“ die Menge der zulässigen Lösungen trivialisiert, ohne die optimalen Lösungen zu verändern, kann man sich Probleme definieren, für die man EXP-APX-Vollständigkeit beweisen kann.

Der Nachteil der hier betrachteten NPO- bzw. der daraus abgeleiteten EXP-APX-vollständigen Probleme ist ihre „Künstlichkeit“.

Wir werden abschließend APX-vollständige „natürliche“ Probleme kennen lernen.



## APX-Vollständigkeit

Mit Hilfe der uns hier nicht zur Verfügung stehenden PCP-Kennzeichnung von NP lässt sich zeigen (s. das Buch von Ausiello et al.).

**Mitteilung:** MAX 3-SAT ist vollständig für die Klasse der Maximierungsprobleme in APX.

Daraus folgt zusammen mit dem folgenden Satz, dass MAX 3-SAT tatsächlich APX-vollständig ist.

**Satz:** Zu jedem Minimierungsproblem  $\mathcal{P} \in \text{APX}$  gibt es ein Maximierungsproblem  $\mathcal{P}' \in \text{APX}$  mit  $\mathcal{P} \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}'$ .

**Beweis:** (Skizze) Es sei  $\mathcal{A}$  eine  $r$ -Approximation von  $\mathcal{P}$ . Definiere  $\mathcal{P}'$  wie  $\mathcal{P}$  bis auf die Maßfunktion, die wie folgt definiert ist:

$$m_{\mathcal{P}'}(x, y) = \begin{cases} (\lceil r \rceil m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)) - (\lceil r \rceil \cdot m_{\mathcal{P}}(x, y))), & m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)) \\ m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\leadsto m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)) \leq m_{\mathcal{P}'}^*(x) \leq (\lceil r \rceil m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)))$$

→  $\mathcal{A}$  ist  $(\lceil r \rceil + 1)$ -Approximation für das Maximierungsproblem  $\mathcal{P}'$ .

Die AP-Reduktion ist wie folgt definiert:

1. Für jede Instanz  $x$  setze  $f(x) = x$ .
2. Für jede Instanz  $x$  und für jede Lösung  $y$  von  $f(x)$ :

$$g(x, y) = \begin{cases} y, & m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x)) \\ \mathcal{A}(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

3.  $\alpha = \lceil r \rceil + 1$ .

Um nachzuweisen, dass diese Reduktion wirklich eine AP-Reduktion ist, betrachte eine Lösung  $y$  mit  $R'_{\mathcal{P}}(x, y) = m_{\mathcal{P}'}^*(x)/m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq r'$ .

Zu zeigen ist:

$$R_{\mathcal{P}}(x, g(x, y)) \leq 1 + \alpha(r' - 1)$$

Dies kann durch Unterscheidung der Fälle  $m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x))$  bzw.  $m_{\mathcal{P}}(x, y) > m_{\mathcal{P}}(x, \mathcal{A}(x))$  durch einige Abschätzungen hergeleitet werden. □

## L-Reduktionen—Motivation

Wie kann man nun APX-Vollständigkeit für „natürliche“ Probleme beweisen? Hierbei ist es manchmal hilfreich, sich „alte“ bekannte NP-Vollständigkeitsbeweise für die betreffende Entscheidungsprobleme anzusehen. So wird für das Kantenschnittproblem üblicherweise (siehe das Buch von Ausiello et al.) der Weg von 3-SAT über  $\text{MAX2SAT}_D$ , NOT-ALL-EQUAL-3SAT zu  $\text{MAXCUT}_D$  gegangen. Hierbei ist es häufig hilfreich, eine andere als die bislang diskutierte AP-Reduktion zu betrachten, da sich dabei NP-Reduktionen leichter übertragen:

## L-Reduktionen–Definition

Es seien  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  zwei NPO-Probleme.  $\mathcal{P}_1$  heißt *L-reduzierbar* auf  $\mathcal{P}_2$ , i. Z.  $\mathcal{P}_1 \leq_L \mathcal{P}_2$ , wenn zwei Funktionen  $f, g$  und zwei positiven Konstanten  $\beta, \gamma$  existieren, sodass:

1.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} : f(x) \in I_{\mathcal{P}_2}$  ist in Polynomzeit berechenbar.
2.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} : S_{\mathcal{P}_1}(x) \neq \emptyset \rightarrow S_{\mathcal{P}_2}(f(x)) \neq \emptyset$ .
3.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall y \in S_{\mathcal{P}_1}(f(x)) : g(x, y) \in S_{\mathcal{P}_1}(x)$  ist in Polynomzeit berechenbar.
4.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} : m_{\mathcal{P}_2}^*(f(x)) \leq \beta m_{\mathcal{P}_1}^*(x)$ .
5.  $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall y \in S_{\mathcal{P}_2}(f(x)) :$   
$$|m_{\mathcal{P}_1}^*(x) - m_{\mathcal{P}_1}(x, g(x, y))| \leq \gamma \cdot |m_{\mathcal{P}_2}^*(f(x)) - m_{\mathcal{P}_2}(f(x), y)|$$

$(f, g, \beta, \gamma)$  heißt auch *L-Reduktion* von  $\mathcal{P}_1$  auf  $\mathcal{P}_2$ .

**Mitteilung:** Es seien  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{NPO}$  mit  $\mathcal{P}_1 \leq_L \mathcal{P}_2$ .  $\mathcal{P}_1 \in \text{APX} \rightarrow \mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$ .

Als eine Anwendung und erstes Glied obiger Reduktionskette zeigen wir:

**Satz:**  $\text{MAX3SAT} \leq_L \text{MAX2SAT}$ .

Beweis: Wir geben einer L-Reduktion  $(f, g, 13, 1)$  an.

Es sei  $\varphi$  eine Instanz von MAX3SAT mit  $m$  Klauseln  $a_i \vee b_i \vee c_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , wobei  $a_i, b_i$  und  $c_i$  Literale sind.

Jeder dieser Klauseln ordnen wir die folgenden zehn neuen Klauseln zu (jede hat höchstens zwei Literale!):

$$(*) \quad \begin{array}{cccccccccc} a_i, & b_i, & c_i, & d_i, & \bar{a}_i \vee \bar{b}_i, & \bar{a}_i \vee \bar{c}_i, & \bar{b}_i \vee \bar{c}_i, & a_i \vee \bar{d}_i, & b_i \vee \bar{d}_i, & c_i \vee \bar{d}_i \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Dabei ist  $d_i$  eine neue Variable.

$f(\varphi) = \varphi'$  sei die sich so ergebene Instanz von MAX2SAT.

$$(*) \quad a_i, \quad b_i, \quad c_i, \quad d_i, \quad \overline{a_i} \vee \overline{b_i}, \quad \overline{a_i} \vee \overline{c_i}, \quad \overline{b_i} \vee \overline{c_i}, \quad a_i \vee \overline{d_i}, \quad b_i \vee \overline{d_i}, \quad c_i \vee \overline{d_i}$$

Die folgende Tabelle zeigt, dass jede Belegung höchstens 7 der 10 Klauseln einer Gruppe der Form (\*) erfüllt (symmetrische Fälle sind nicht aufgeführt)

$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$
0	0	0	0					1	1	1	1	1	1	6
0	0	0	1				1	1	1	1				4
0	0	1	0			1		1	1	1	1	1	1	7←
0	0	1	1			1	1	1	1	1			1	6
0	1	1	0		1	1		1	1		1	1	1	7←
0	1	1	1		1	1	1	1	1			1	1	7←
1	1	1	0	1	1	1					1	1	1	6
1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1	7←

Für jede erfüllende Belegung der ursprünglichen 3-SAT-Klausel  $a_i \vee b_i \vee c_i$  gibt es eine Belegung von (\*), die sieben Klauseln erfüllt; diese sind durch Pfeile in der Tabelle markiert. Wegen der ersten Zeile der Tabelle gibt es im Falle einer  $a_i \vee b_i \vee c_i$  nicht-erfüllenden Belegung eine Belegung von  $d_i$ , die 6 Klauseln von (\*) erfüllt. Somit können wir schließen:

$$m^*(\varphi') = 6m + m^*(\varphi) \leq 12m^*(\varphi) + m^*(\varphi) = 13m^*(\varphi).$$

Die Ungleichung gilt, da zu einer KNF-Formel stets eine Belegung existiert, die wenigstens die Hälfte der Klausel erfüllt (siehe Analyse der Greedy-Heuristik für MAXSAT in früherer Vorlesung).

Ist  $\tau'$  eine Belegung der Variablen von  $\varphi'$ , so bezeichne  $\tau = g(\varphi, \tau')$  die Restriktion von  $\tau'$  auf die in  $\varphi$  vorkommenden Variablen. Durch Betrachten obiger Tabelle ergibt sich

$$m(\varphi, \tau) \geq m(\varphi', \tau') - 6m.$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} |m^*(\varphi) - m(\varphi, g(\varphi, \tau'))| &= m^*(\varphi) - m(\varphi, \tau) \\ &= m^*(\varphi') - 6m - m(\varphi, \tau) \\ &\leq m^*(\varphi') - 6m - m(\varphi', \tau') + 6m \\ &= 1 \cdot |m^*(\varphi') - m(\varphi', \tau')|. \square \end{aligned}$$

## **Facetten der Härte** für Approximationen

Diese Darstellung folgt:

D.S. Johnson: The NP-Completeness Column: The Many Limits on Approximation. ACM Trans. Alg., Band 2, S. 473–489, 2006.

Der “Goldstandard” für Härteresultate:

Ist betrachtetes Optimierungsproblem “leicht” (das hängt von der konkreten Klasse ab, die man betrachtet), so folgt  $P\text{TIME} = NP$ .



## Der “Goldstandard” für Härteresultate lässt Lücken

**Beispiel:** Dinur und Safra konnten 2002 (ECCC, dann SODA 2005) zeigen:

*Falls  $P \neq NP$ , so lässt sich das Knotenüberdeckungsproblem nicht besser als 1.36067 approximieren.*

Diese Aussage lässt noch eine beträchtliche Lücke, denn das beste bekannte positive Approximationsergebnis stammt von Karakostas (ICALP 2005):

*Das Knotenüberdeckungsproblem für  $n$ -Knotengraphen lässt sich in der Leistungsgüte  $2 - \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\log(n)}}\right)$  approximieren.*

Unter schwächeren Annahmen lassen sich manchmal stärkere Aussagen gewinnen.

## Intuitive Ähnlichkeit von Problemen

Bekannt: Das Cliquesproblem.

Feige et al. konnte 2006 zeigen (J.ACM Band 43, Seiten 268–292):

**Mitteilung:** *MAXCLIQUE lässt sich nicht mit einem Faktor  $2^{(\log(n))^{1-\epsilon}}$  approximieren für irgendein  $\epsilon > 0$ , falls nicht  $NP \subseteq DTIME(n^{\text{polylog}(n)})$ .*

Unter stärkeren Voraussetzungen (Goldstandard) kann man eine schwächere Aussage zeigen:

**Mitteilung:** Gilt  $P \neq NP$ , so lässt sich MAXCLIQUE für kein  $\epsilon > 0$  auf einen Faktor von  $n^{1-\epsilon}$  approximieren.

Gelten ähnliche Schranken für ähnliche Probleme ?

Leider nicht immer...

## Intuitive Ähnlichkeit von Problemen

Sehr ähnlich zu dem Problem des Findens großer Cliques scheint doch das Problem zu sein, möglichst große ausgeglichene Bicliquen zu finden.

Ein vollständiger bipartiter Graph  $K_{k,\ell}$  heißt auch *Biclique*. Eine Biclique heißt *ausgeglichen*, falls auf beiden Seiten der Bipartition gleichviele Knoten liegen.

Das Problem, möglichst große ausgeglichene Bicliquen in einem (nicht notwendig bipartiten) Graphen zu finden, ist bekanntermaßen *NP*-hart (auch bekannt als BCBS: balanced complete bipartite subgraph).

## BCBS-Approximation

Oft begegnen wir Approximationsschranken, die randomisierte Komplexitätsklassen betreffen.

BP steht für “bounded error probabilistic”.

Details zu dieser und vielen anderen Komplexitätsklassen finden Sie unter Komplexitäts-Wiki am Caltech.

**Mitteilung:** BCBS lässt sich nicht mit einem Faktor  $n^\delta$  approximieren für ein bestimmtes  $\delta > 0$ , falls nicht  $\text{NP} \subseteq \bigcap_{\epsilon > 0} \text{BPTIME}(2^{n^\epsilon})$ .

Eine ähnliche Approximationsschranke konnte Feige 2002 unter einer anderen Annahme zeigen, nämlich unter der sogenannten *Durchschnittsfalhärte* von 3SAT. Auch hier kommt aber wieder eine Randomisierung ins Spiel.

## Label Cover: ein hübsches Hilfsproblem

Eine Instanz wird beschrieben durch:

einen bipartiten Graphen  $G = (V_1, V_2; E)$ ,  $E \subseteq V_1 \times V_2$ ,

natürliche Zahlen  $N, M, B$ ,

Abbildungen  $\pi_{u,v} : \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  für jede Kante  $(u, v) \in E$ .

**Frage:** Gibt es Knotenmarkierungen  $L_1 : V_1 \rightarrow \{1, \dots, M\}$  und  $L_2 : V_2 \rightarrow \{1, \dots, N\}$ , sodass mindestens  $B$  Kanten *abgedeckt* sind ?

Hierbei ist eine Kante  $(u, v)$  abgedeckt durch die Markierung, falls  $\pi_{u,v}(L_1(u)) = L_2(v)$ .

Arora und Lund konnten 1997 zeigen, dass die Maximierungsvariante von Label Cover hart zu approximieren ist für jeden konstanten Faktor, wenn nicht  $P_{TIME} = NP$ .

## Label Cover: Mehr Einzelheiten

Arora und Lund konnten genauer folgendes zeigen:

Zu jedem  $0,5 > \epsilon > 0$  gibt es eine Konstante  $k(\epsilon)$ , sodass für alle Instanzen von Label Cover mit  $M, N \leq k(\epsilon)$  die nachstehend beschriebenen zwei Fälle *NP*-hart zu unterscheiden sind:

- (1) Es gibt eine Markierung, die alle Kanten abdeckt.
- (2) Es gibt keine Markierung, die mehr als  $\epsilon \cdot |E|$  viele Kanten abdeckt.

Die so entstandene Lücke wird im Beweis der in der vorigen Folie gezeigten Behauptung verwendet.endslide

**Unique Game Conjecture** (UGC) ist ein seltsamer Name für eine Einschränkung von Label Cover; tatsächlich wurden Label Cover und die Unique Game Conjecture zunächst in Termini von Spielen definiert.

**Vermutung** (UGC): Für alle  $\epsilon, \delta \in (0; 1/2)$  gibt es eine Konstante  $k(\epsilon, \delta)$ , sodass für Label Cover Instanzen mit  $M = N = k(\epsilon, \delta)$ , in denen darüber hinaus die Abbildungen  $\pi_{u,v}$  sämtlich Permutationen sind, es keinen Polynomzeit-Algorithmus gibt, der unterscheiden kann zwischen

- (1) Es gibt eine Markierung, die wenigstens  $(1 - \delta)|E|$  viele Kanten abdeckt und
- (2) Es gibt keine Markierung, die mehr als  $\epsilon \cdot |E|$  viele Kanten abdeckt.

Viele Forscher bezweifeln (noch) die Gültigkeit der UGC.

## Konsequenzen der UGC:

Khot und Regev konnten 2003 zeigen:

**Mitteilung:** Gilt die UGC, so gibt es keinen Algorithmus, der das Knotenüberdeckungsproblem auf einen konstanten Faktor besser als 2 approximiert.

Noch überraschender ist das Ergebnis für MaxCut:

Hierbei wird für einen gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  nach einer Knotenmenge  $S$  gesucht, die die Zahl der Kanten mit genau einem Endpunkt in  $S$  maximiert.

Goemans und Williamson haben 1995 einen (komplizierten)  $\alpha$ -Faktor-Approximationsalgorithmus gefunden mit  $\alpha = \min_{0 < \theta \leq \pi} (\pi(1 - \cos(\theta)) / (2\theta))$ .

Unter der Annahme der UGC ist dieser Faktor bestmöglich !