Näherungsalgorithmen

(Approximationsalgorithmen)

WiSe 2006/07 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@informatik.uni-trier.de

Näherungsalgorithmen Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

Zusammenfassung des bisher Beobachteten:

- Bisher kennengelernte Näherungsalgorithmen sind oft sehr kurze Programmstücke
- Schwierigkeit: Analyse, betreffend die **Güte** der Näherung!
- Warum sind die Gütegarantien schwierig zu beweisen?
  Grundsätzlich (und intuitiv) lässt sich dies genau so begründen wie die vermutete Ungleichheit von P und NP.

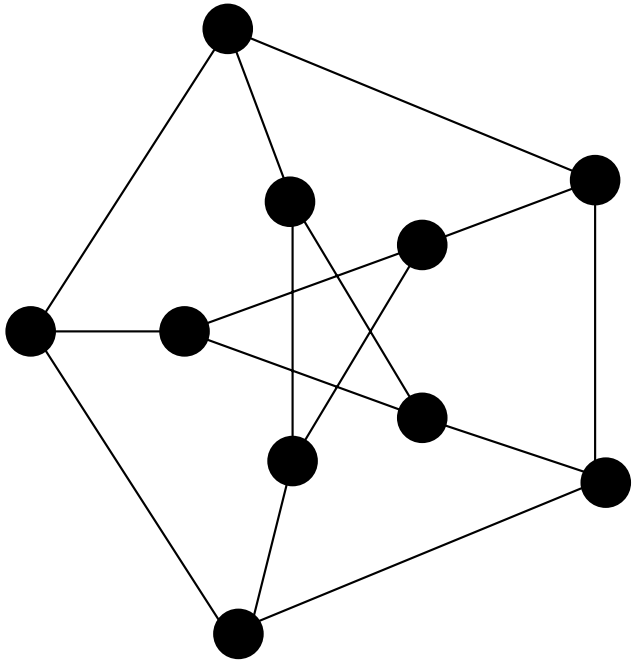
Knotenüberdeckungsproblem

+ Es ist leicht, eine vorgegebene Lösung insofern zu verifizieren, als dass die Knotenüberdeckungseigenschaft überprüft wird.

- Es ist schwierig nachzuweisen, dass eine gefundene Knotenüberdeckung kleinstmöglich (optimal) ist.

Konkret: Betrachten Sie den Petersen-Graph.

Der Petersen-Graph



Ein *Optimierungsproblem* $\mathcal{P}$ wird beschrieben durch ein Quadrupel $(I_{\mathcal{P}}, S_{\mathcal{P}}, m_{\mathcal{P}}, \text{opt}_{\mathcal{P}})$:

1. $I_{\mathcal{P}}$ ist die Menge der möglichen Eingaben (*Instanz*en),

2. $S_{\mathcal{P}} : I_{\mathcal{P}} \to$ Menge der *zulässigen Lösungen* (feasible solutions),

3. $m_{\mathcal{P}} : (x, y) \mapsto m_{\mathcal{P}}(x, y) \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Q}, ...$) für $x \in I_{\mathcal{P}}, y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ liefert den *Wert* der zulässigen Lösung y und

4. $\text{opt}_{\mathcal{P}} \in \{\min, \max\}$: $\mathcal{P}$ Minimierungs- oder Maximierungsproblem ?

$I_{\mathcal{P}}$ und $S_{\mathcal{P}}(x)$ sind –geeignet codierte– formale Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

Weitere Bezeichnungen

$S^*_{\mathcal{P}} : I_{\mathcal{P}} \to$ Menge der *bestmöglichen Lösungen* (optimum solution), d.h.

$$\forall x \in I_{\mathcal{P}}\ \forall y^*(x) \in S^*_{\mathcal{P}}(x) : m_{\mathcal{P}}(x, y^*(x)) = \mathrm{opt}_{\mathcal{P}}\{m_{\mathcal{P}}(x, z) \mid z \in S_{\mathcal{P}}(x)\}.$$

Der Wert einer bestmöglichen Lösung wird auch $m^*_{\mathcal{P}}(x)$ notiert.

Ist $\mathcal{P}$ aus dem Zusammenhang klar, so schreiben wir kurz –unter Fortlassung des Indexes $\mathcal{P}$— $I, S, m, \mathrm{opt}, S^*, m^*$.

Hinweis: Wir benutzten schon früher C^* für kleinstmögliche Überdeckung.

Problemvarianten

Konstruktionsproblem (construction problem):

$\mathcal{P}_C$: Ggb. $x \in I_{\mathcal{P}}$, liefere ein $y^*(x) \in S^*_{\mathcal{P}}(x)$ sowie ihren Wert $m^*_{\mathcal{P}}(x)$

Auswertungsproblem (evaluation problem):

$\mathcal{P}_E$: Ggb. $x \in I_{\mathcal{P}}$, liefere $m^*_{\mathcal{P}}(x)$

Entscheidungsproblem (decision problem):

$\mathcal{P}_D$: Ggb. $x \in I_{\mathcal{P}}$ und Parameter $k \in \mathbb{N}$, entscheide ob

$$m^*_{\mathcal{P}}(x) \geq k, \quad (\text{falls } \text{opt}_{\mathcal{P}} = \max)$$

bzw. ob

$$m^*_{\mathcal{P}}(x) \leq k, \quad (\text{falls } \text{opt}_{\mathcal{P}} = \min).$$

Ein Beispiel: das Knotenüberdeckungsproblem VC

1. $I = \{G = (V, E) \mid$ G ist Graph $\}$
2. $S(G) = \{U \subseteq V \mid \forall\{x, y\} \in E : x \in U\}$ (Knotenüberdeckungseigenschaft)
3. $m = |U|$
4. opt $= \min$

VC_D ist dann das entsprechende „parametrisierte Problem“, d.h. ggb. Graph $G = (V, E)$ und Parameter k, gibt es eine Knoteüberdeckung $U \subseteq V$ mit $|U| \leq k$?

Die Klassen PO und NPO

$\mathcal{P} = (I, S, m, \text{opt})$ gehört zu NPO, gdw:

1. $x \stackrel{?}{\in} I$ ist in Polynomialzeit entscheidbar.

2. Es gibt ein Polynom q derart, dass $\forall x \in I \; \forall y \in S(x) : |y| \leq q(|x|)$ und für alle y mit $|y| \leq q(|x|)$ ist die Frage $y \stackrel{?}{\in} S(x)$ in Polynomialzeit entscheidbar.

3. m ist in Polynomialzeit berechenbar.

Beispiel VC: zu Punkt 2: Jede Knotenüberdeckung ist in ihrer Größe trivialerweise durch die Mächtigkeit der Knotenmenge beschränkt.

Satz 1: Ist $\mathcal{P} \in$ NPO, so ist $\mathcal{P}_{\mathrm{D}} \in$ NP.

Beweis: (nur für $\mathrm{opt}_{\mathcal{P}} = \max$), $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ lässt sich bei Eingabe von $x \in I$ und k wie folgt lösen (in nichtdeterministischer Weise):

1. Rate y mit $|y| \leq q(|x|)$ in Zeit $\mathcal{O}(q(|x|))$. ($q(|x|)$ Bits sind zu raten)
2. Teste $y \in S(x)$ in Polynomialzeit.
3. Falls $y \in S(x)$, berechne $m(x, y)$ in Polynomialzeit.
4. Falls $y \in S(x)$ und $m(x, y) \geq k$, antworte JA.
5. Falls $y \notin S(x)$ oder $m(x, y) < k$, antworte NEIN.

Die Klasse PO

Ein Optimierungsproblem $\mathcal{P}$ gehört zur Klasse PO gdw. $\mathcal{P}_C$ in Polynomialzeit gelöst werden kann.

Beachte: PO über das zugehörige Konstruktionsproblem definiert!

Erinnerung: (polynomielle) **Turing-Reduzierbarkeit**

$\mathcal{P}_1 \leq_T^{(p)} \mathcal{P}_2$ gdw.
es gibt eine Turing-Maschine, die eine Instanz x von $\mathcal{P}_1$ (in Polynomialzeit) mit Hilfe von Orakelanfragen bearbeiten kann.

Orakelanfragen sind generierte Instanzen von $\mathcal{P}_2$, die auf ein „Orakelband“ geschrieben werden und angenommenerweise in konstanter Zeit beantwortet werden.

Wir schreiben $\mathcal{P}_1 \equiv_T^p \mathcal{P}_2$, falls sowohl $\mathcal{P}_1 \leq_T^p \mathcal{P}_2$ als auch $\mathcal{P}_2 \leq_T^p \mathcal{P}_1$ gelten.

Satz 2: $\forall \mathcal{P} \in \mathrm{NPO} : \mathcal{P}_D =_T^p \mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_C$

Beweis: Klar: $\mathcal{P}_D \leq_T^p \mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_C$.
Z.z: $\mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_D$.
Dazu überlegen wir uns:

$$\{m_{\mathcal{P}}(x, y) \mid y \in S_{\mathcal{P}}(x)\} \subseteq 0 \ldots 2^{p(|x|)} \tag{1}$$

für ein Polynom p.
Dann kann $\mathcal{P}_E$ durch binäre Suche auf dem Intervall $0 \ldots 2^{p(|x|)}$ mit $p(|x|)$ vielen Orakelanfragen an $\mathcal{P}_D$ gelöst werden.

Da $\mathcal{P} \in \mathrm{NPO}$, ist $m_{\mathcal{P}}(x, y)$ in Zeit $r(|x|, |y|)$ für ein Polynom r berechenbar. Das heißt insbesondere, dass

$$0 \leq m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq 2^{r(|x|,|y|)}$$

gilt. Da $\mathcal{P} \in \mathrm{NPO}$, ist $|y| \leq q(|x|)$ für alle $y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ für ein Polynom q. Daher gilt für das Polynom $p(n) := r(n, q(n))$ die Beziehung (1).

Das Beispiel MAXCLIQUE

Ein *vollständiger Graph* mit n Knoten ist (isomorph zu, i.Z. $\cong$)

$$K_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}).$$

Eine *Clique* in einem Graphen ist eine Knotenteilmenge, die einen vollständigen Graphen induziert. Das MAXCLIQUE-Problem fragt in einem Graphen nach größtmöglichen (maximum) Cliquen.

Unter Benutzung des oben eingeführten Formalismus zur Spezifizierung von Optimierungsproblemen stellt sich MAXCLIQUE wie folgt dar:

I : alle Graphen $G = (V, E)$
S : alle Cliquen in G, d.h. $U \subseteq V : G[U] \cong K_{|U|}$ (vollständiger Graph mit $|U|$ Knoten)
$m = |U|$
opt $= \max$

Algorithmus für $\text{MAXCLIQUE}_C \leq_T^p \text{MAXCLIQUE}_E$

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: eine größtmögliche Clique in G

begin

$k := \text{MAXCLIQUE}_E(G)$;

Falls $k = 1$ **liefere** irgendeinen Knoten in V

sonst finde Knoten $v \in V$ mit $k = \text{MAXCLIQUE}_E(G(N[v]))$

und **liefere** $\{v\} \cup \text{MAXCLIQUE}_C(G(N(v)))$.*

*Zur Notation: $N(v) = N[v] \setminus \{v\}$ ist die *offene Umgebung* von v.

Warum ist das Programm korrekt ?

- Die Auswahl „$v \in V$ mit $k = MC_E(G(N[v]))$“ garantiert, dass v in einer größtmöglichen Clique liegt.

- Es ist klar, dass $G(N(v))$ eine Clique (evtl. mehrere) der Größe $k-1$ enthält (und auch keine größere); eine dieser wird rekursiv gefunden.

Zeitkomplexität des Algorithmus ($n =$ # Knoten):

$$\begin{aligned} T(1) &= \mathcal{O}(1) \\ T(n) &= (n+1) + T(n-1) \\ &\quad \hookrightarrow \text{Durchsuchen des Graphen} \\ &= (n+1) + n + \ldots + n + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

Satz 3: Ist $\mathcal{P} \in$ NPO und ist $\mathcal{P}_D$ NP-hart, so gilt: $\mathcal{P}_C \leq_T \mathcal{P}_D$.

Beweis: (für $\text{opt}_{\mathcal{P}} = \max$).
Im Beweisgang werden wir ein anderes NPO-Problem $\mathcal{P}'$ konstruieren mit $\mathcal{P}_C \leq_T^p P'_E$. Wegen Satz 1 ist $\mathcal{P}_D$ nach Vorraussetzung NP-vollständig, also gilt $\mathcal{P}'_E \leq_T^p \mathcal{P}'_D \leq_T^p \mathcal{P}_D$ wegen Satz 2, und die Transitivität der Reduktionsrelation liefert die Behauptung.
$\mathcal{P}'$ ist wie $\mathcal{P}$ definiert mit Ausnahme des Messfunktion $m_{\mathcal{P}'}$. Betrachte dazu ein Polynom q mit $\forall x \in I_{\mathcal{P}}\ \forall y \in S_{\mathcal{P}}(x), |y| \leq q(|x|)$ (s. Definition NPO). Mit anderen Worten: $S_{\mathcal{P}}(x) \subseteq \{0,1\}^{\leq q(|x|)}$.

Setze nun $\tau(y) := 2^{q(|x|)-|y|}y$. Für jedes $y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ bezeichne $\lambda(y)$ den Wert von $\tau(y)$, interpretiert als Ternärzahl. Daraus folgt: $0 \leq \lambda(y) \leq 3^{q(|x|)}$.
Außerdem gilt: $\forall y, y' \in S_{\mathcal{P}}(x) : y = y' \iff \tau(y) = \tau(y')$.
Setze für jedes $x \in I_{\mathcal{P}'} = I_{\mathcal{P}}$ und jedes $y \in S_{\mathcal{P}'} = S_{\mathcal{P}}$:

$$m_{\mathcal{P}'}(x,y) = 3^{q(|x|)+1} m_{\mathcal{P}}(x,y) + \lambda(y).$$

Beachte: $\mathcal{P}' \in$ NPO, denn $m_{\mathcal{P}'}$ ist in Polynomialzeit berechenbar, weil insbesondere die Exponentiation $3^{q(|x|)}$ nur $\mathcal{O}(q(|x|))$ viele Bits benötigt.
Damit: $\forall x\ \forall y_1, y_2 \in S_{\mathcal{P}'}(x) : y_1 \neq y_2 \to m_{\mathcal{P}'}(x,y_1) \neq m_{\mathcal{P}'}(x,y_2)$.

Also gibt es eine eindeutig bestimmte maximale zulässige Lösung $y^*_{\mathcal{P}'}(x)$ in $S^*_{\mathcal{P}'}(x)$. Nach Definition von $m_{\mathcal{P}'}$ gilt ferner:

$$(m_{\mathcal{P}'}(x, y_1) > m_{\mathcal{P}'}(x, y_2) \Rightarrow m_{\mathcal{P}}(x, y_1) \geq m_{\mathcal{P}}(x, y_2)).$$

Daraus folgt: $y^*_{\mathcal{P}'}(x) \in S^*_{\mathcal{P}}(x)$.
$y^*_{\mathcal{P}'}(x)$ kann wie folgt mit einem Orakel für $\mathcal{P}'_E$ in Polynomialzeit berechnet werden.

1. Bestimme $m^*_{\mathcal{P}'}(x)$ (Orakel!)

2. Berechne $\lambda(y^*_{\mathcal{P}'}(x)) = m^*_{\mathcal{P}'}(x) \mod 3^{q(|x|)+1}$.

3. Bestimme y aus $\lambda(y)$.

Daher kann $\mathcal{P}_C$ mit einem Orakel für $\mathcal{P}'_E$ in Polynomialzeit berechnet werden, denn $m^*_{\mathcal{P}}(x) = m_{\mathcal{P}}(x, y)$ für das mit oben stehendem Algorithmus berechnete y.

Grundtechniken

- Greedy-Verfahren
- Partitionsprobleme
- Lokale Suche
- Lineares Programmieren
- Dynamisches Programmieren

Allgemeines zu Greedy-Verfahren

hier speziell bei Maximierungsverfahren

Allgemeine Aufgabe: Aus einer Grundmenge X ist eine maximale zulässige Lösung S_{max} zu finden.
Voraussetzung: Die Menge der zulässigen Lösungen ist monoton, d.h., falls S zulässige Lösung ist, so auch $S' \subseteq S$ für alle $S' \subseteq S$.
Damit ist auch $\emptyset$ eine zulässige (Ausgangs-)Lösung.
X sei nach einem geeigneten Kriterium sortiert.
Allgemeine Vorgehensweise:
Für jedes Element x der Liste X wird für die bislang gefundene zulässige Lösung S' geprüft, ob $S' \cup \{x\}$ ebenfalls zulässig ist.
Wenn ja, wird $S' := S' \cup \{x\}$ gebildet.
Daher werden stets nur zulässige Lösungen ausgegeben.
Außerdem ist klar, dass eine so gefundene zulässige Lösung S' nicht mehr durch Hinzunahme eines weiteren Elements $x \notin S'$ erweitert werden kann, denn wenn $\{x\} \cup S'$ zulässig wäre, dann auch $\{x\} \cup S''$ für alle $S'' \subseteq S'$ (Monotonie!);
speziell gälte dies für ein S'', das als „bisherige Lösung“ an dem Punkt, als x untersucht wurde, gebildet worden war.

Maximum Knapsack (Rucksackproblem)

I:	endliche Menge X	bzw. „Liste“ $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
	Profitfunktion $p : X \to \mathbb{N}$	bzw. „Liste“ $\{p_1, \ldots, p_n\}$
	Größenfunktion $a : X \to \mathbb{N}$	bzw. „Liste“ $\{a_1, \ldots a_n\}$
	Fassungsvermögen $b \in \mathbb{N}$ des Rucksacks	
	[O.E.: $\forall 1 \leq i \leq n : a_i \leq b$ im Folgenden]	
S:	$\{Y \subseteq X \mid s(Y) = \sum_{x_i \in Y} a_i \leq b\}$	
m:	$p(Y) = \sum_{x_i \in Y} p_i$	
opt.:	max	

Mitteilung: Knapsack ist NP-vollständig.

Heuristische Idee: Es ist günstig, möglichst solche Sachen x_i in den Rucksack zu tun, die möglichst viel Profit versprechen im Verhältnis zum benötigten Platz.
$\rightsquigarrow$ GreedyKnapsack (X, p, a, b)

1. Sortiere X absteigend nach dem Verhältnis $\frac{p_i}{a_i}$
   ($\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei die erhaltene sortierte Grundmenge)

2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)

3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.

4. Liefere Y zurück.

GreedyKnapsack kann **beliebig schlechte Ergebnisse** liefern, wie folgendes Beispiel lehrt:

$p : \{p_1 = 1, \ldots, p_{n-1} = 1, p_n = b - 1\}$
$a : \{a_1 = 1, \ldots, a_{n-1} = 1, a_n = b = k \cdot n\}$ für ein beliebig großes $k \in \mathbb{N}$

Hier ist für $x = (X, p, a, b) : m^*(x) = b - 1 = k \cdot n - 1 > kn - k = k(n-1)$ (durch Wahl des letzten Elements), aber GreedyKnapsack liefert, da

$$\frac{p_1}{a_1} = 1 = \ldots = \frac{p_{n-1}}{a_{n-1}} > \frac{p_n}{a_n} = \frac{b-1}{b}$$

$$m_{\text{Greedy}}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i = n - 1, \text{ d.h. } \frac{m^*(x)}{m_{\text{Greedy}}(x)} > k$$

Andere heuristische Idee fürs Rucksackfüllen:
X absteigend nach dem Profit sortieren. $\rightsquigarrow$ GreedyKnapsack'(X, p, a, b)

1. Sortiere X absteigend nach dem Profit p_i.
   ($\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei die erhaltene sortierte Grundmenge)

2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)

3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.

4. Liefere Y zurück.

Nahezu dasselbe Beispiel wie eben (nur mit $a_n = \frac{n}{k}$) lehrt: beliebig schlechte Lösungen möglich !

Erstaunlich: Kombinationsalgorithmus mit Gütegarantie

$\rightsquigarrow$ GreedyKnapsackKombi(X, p, a, b)

1. $Y_1 :=$ GreedyKnapsack (X, p, a, b)

2. $Y_2 :=$ GreedyKnapsack'(X, p, a, b)

3. Wenn $p(Y_1) \geq p(Y_2)$, dann liefere Y_1, sonst liefere Y_2.

Eine andere (vereinfachte) Kombination lautet: GreedyKnapsack$''(X, p, a, b)$

1. Sortiere X absteigend nach Verhältnis $\frac{p_i}{a_i}$ ($\{x_1, \ldots, x_n\}$: sortierte Grundmenge)

2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)

3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.

4. " Suche x_{max} mit $\forall i : p_i \leq p_{max}$ (maximaler Profit!)

5. " Wenn $p(Y) \geq p_{max}$ dann liefere Y sonst liefere $\{x_{max}\}$.

Lemma: Für alle Instanzen x gilt:

$$m_{\text{GreedyKnapsack}''}(x) \leq m_{\text{GreedyKnapsackKombi}}(x)$$

Damit überträgt man die im folgenden Satz gezeigte Gütegarantie von Greedy-Knapsack" auf GreedyKnapsackKombi.
Abkürzend schreiben wir:
$m_G, m_{G''}$ für $m_{\text{GreedyKnapsack}}$ bzw. $m_{\text{GreedyKnapsack}''}$.

Satz 1: Ist x eine MaximumKnapsack-Instanz, so ist

$$\frac{m^*(x)}{m_{G''}(x)} < 2.$$

Beweis: Es sei j der Index des ersten Elements, welches der Greedy-Algorithmus GreedyKnapsack *nicht* in den Rucksack tut.
Es gilt:

$$\overline{p_j} := \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x) \leq m_{G''}(x).$$

Ferner setzen wir:

$$\overline{a_j} := \sum_{i=1}^{j-1} a_i \leq b.$$

Behauptung: $m^*(x) < \overline{p_j} + p_j$.

Aus der Behauptung folgt die Aussage des Satzes, denn:

- Gilt $p_j \leq \overline{p_j}$, so ist $m^*(x) < 2\overline{p_j} \leq 2m_G(x) \leq 2m_{G''}(x)$.
- Gilt $p_j > \overline{p_j}$, so ist $m^*(x) < 2p_j \leq 2p_{max} \leq 2m_{G''}(x)$.

Warum gilt die Behauptung?

Betrachte (kurzfristig) die folgende Verallgemeinerung des Rucksackproblems: Es sei nun erlaubt, „Bruchstücke“ der x_i (mit entsprechend der Größe skaliertem Gewinn) in den Rucksack zu tun. Der Wert einer optimalen Lösung für das neue Problem ist sicher eine obere Schranke für $m^*(x)$. Wie man leicht einsieht, ist

$$\overline{p_j} + (b - \overline{a_j}) \cdot \frac{p_j}{a_j}$$

der maximale Wert einer Lösung des variierten Problems, wenn die x_i nach $\frac{p_i}{a_i}$ absteigend sortiert vorliegen und j wie oben definiert ist.

$$\Rightarrow \quad m^*(x) \leq \overline{p_j} + \underbrace{(b - \overline{a_j})}_{<a_j} \cdot \frac{p_j}{a_j} < \overline{p_j} + p_j.$$

Tatsächlich liefert Satz 1, dass der folgende Algorithmus eine $\frac{1}{2}$-Approximation von Maximum Knapsack ist:

1. Sortiere X absteigend nach $\frac{p_i}{a_i}$.

2. $Y := \emptyset$; $i := 1$;

3. Solange $i \leq n$ und $a_i \leq b$, tue
   $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$; $i := i + 1$.

4. Wenn $a_i \leq b$, dann liefere Y,
   sonst, wenn $p_i \leq p(Y)$, dann liefere Y,
   sonst liefere $\{x_i\}$.

Hinweise: (1) Verallgemeinerung von Problemen ist oft ein Ansatz, um Schranken für Approximationsgüte zu gewinnen.
(2) S. Martello, P. Toth: Knapsack Problems; Algorithms and Computer Implementations, Wiley, 1990.