Fernau / Gulan
Universität Trier

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Strukturen und Logik

Aufgabenblatt 5

Abgabe der Ausarbeitungen bis vor Beginn der ersten zugehörigen Übungssstunde
Wo? Fächer beschriftet mit „Diskrete Strukturen und Logik“ vor Raum H426

Hinweis: Relationen werden hier auch wie mehrstellige Prädikate notiert. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $R(x, y)$, statt $(x, y) \notin R$ auch $\neg R(x, y)$.

Aufgabe 18 (Abschlüsse von Relationen) (3+3+2+3 Punkte)

1. Gegeben die Relation $R = \{(a, a), (b, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (c, d)\}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie die reflexive, die transitive und die symmetrische Hülle jeweils separat an.
2. Geben Sie zudem die kleinste Relation R' an, so dass $R \subseteq R'$ und R' transitiv und symmetrisch ist.
3. Was würde sich an den Antworten von Teilaufgabe 1 ändern, wenn R auf $M' = \{a, b, c, d, e\}$ definiert wäre?
4. Macht es Sinn, den antisymmetrischen Abschluss einer Relation zu definieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19 (Eigenschaften von Relationen) (3+3+3 Punkte)

Geben Sie für die Relation $D_i \subseteq S_i \times S_i$ jeweils an, ob Sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv ist. Beweisen sie Ihre Aussagen.

1. $S_1 = \mathbb{Q}$; $(x, y) \in D_1 \leftrightarrow |x| \leq |y|$
2. $S_2 = \mathbb{N}$; $(x, y) \in D_2 \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : |x| \cdot |y| = 2k$
3. $S_3 = \mathbb{Z}$; $(x, y) \in D_3 \leftrightarrow x$ ist ungerade

Aufgabe 20 (Relationen im Alltag) (2+4+4 Punkte)

Verwandschaftsbeziehungen lassen sich hervorragend relational ausdrücken. Wir betrachten Relationen auf der Menge aller Menschen:

$$\begin{array}{ccr} S(x,y) & \Leftrightarrow & x \text{ ist Sohn von } y \\ V(x,y) & \Leftrightarrow & x \text{ ist Vater von } y \\ M(x,y) & \Leftrightarrow & x \text{ ist Mutter von } y \end{array}$$

1. Wie lässt sich das Prädikat $W(x)$, für „x ist weiblichen Geschlechts", mithilfe der angegebenen Relationen ausdrücken?
2. Definieren Sie unter alleiniger Verwendung der vorgegebenen Relationen die Relationen
   (a) $Sc(x,y)$ für „x ist Schwester von y".
   (b) $O(x,y)$ für „x ist Onkel von y".
3. Geben Sie eine rekursive Definition der Relation $N(x,y)$, für „x ist Nachfahre von y", an.

Aufgabe 21 (Potenzen von Relationen) (5 Punkte)

Es sei R eine Relation über der Menge M. Zeigen Sie durch Induktion:

$$\forall n,m \in N(R^{n+m} = R^n \circ R^m)$$

Geben Sie genau an, welche (bekannten) Rechengesetze Sie dabei benutzt haben.