Fernau/Raible
Sommersemester 2008
Universität Trier

Theoretische Informatik Trier

Übungen zur Vorlesung

Automatentheorie und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 1

Abgabe der Ausarbeitungen: MO, 14.04.2008, spätestens 12.00 Uhr

Wo? Fächer beschriftet mit "Automaten und Formale Sprachen"
in der Mitte der vierten Etage vor H426 oder um 12.25 Uhr in der Übung.
Die Übungsaufgaben werden dann gleich anschließend
in der Übung vorgerechnet.

Allgemeine Hinweise entnehmen Sie bitte der Seite

…http://www.informatik.uni-trier.de/ raible/Lehre/AFS08/AFSUebung08.html

Die Scheinkriterien sind im ersten Foliensatz aufgeführt. Beachten Sie nochmals die Hinweise zur Anfertigung der Hausaufgaben: Diese sollte in Gruppen zu 2-3 Personen erfolgen. Die Lösungen sind handschriftlich anzufertigen; weder
Schreibmaschinen- noch Computerausdrucke werden akzeptiert, erst recht keine Kopien. Eine Woche später (in der Regel) werden die korrigierten und "bepunkteten" Hausaufgaben wieder zurückgegeben (ebenfalls vor den Übungen).

Da nach dem jeweils angegebenen Abgabezeitraum die Aufgaben vorgerechnet werden, besteht keine Möglichkeit einer späteren Abgabe. Mit anderen Worten: verspätete Abgaben gelten als nicht abgegeben und werden dementsprechend mit 0 Punkten bewertet.

Klären Sie bitte Schwierigkeiten mit Vorlesungen oder Übungen möglichst umgehend in den zur Verfügung gestellten Sprechzeiten. In der Tutorensprechstunde stehen Ihnen Studenten höherer Semester zu Rückfragen bereit.

Sollten Sie an der Klausur nicht teilnehmen können, so legen Sie bitte ein ärztliches Attest vor; andernfalls wird die Klausur mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 1 (Monoide) (4+2 Punkte)

In der Vorlesung haben wir erfahren, dass die Menge Z^Z zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ ein Monoid bildet. Geben Sie die Verknüpfungstafel für den Fall $Z = \{0, 1\}$ an; kennzeichnen Sie das neutrale Element, indem Sie es an erster Stelle anführen.
Ist das Monoid kommutativ, d.h., gilt für alle Elemente $f, g \in Z^Z : f \circ g = g \circ f$? (Diskutieren Sie hierfür entweder alle Fälle oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 2 (Monoide) (2+2+6+3+2 Punkte)

1. Ist folgende Struktur ein Monoid?
   $((a,b),+)$ mit $a,b \in \{0,1,2\}$ und
   $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = ((a_1+a_2) \bmod 3, (b_1+b_2) \bmod 3)$.

2. Ist folgende Struktur ein Monoid?
   $((a,b),\star)$ mit $a,b \in \{0,1,2\}$
   und $(a_1,b_1) \star (a_2,b_2) = ((a_1+a_2) \bmod 3, b_1 \cdot (b_2+a_1) \bmod 3)$, wobei
   $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation ist.

3. Eine 2×2-Matrix über $\mathbb{N}$ in allgemeiner Form ist, wie folgt definiert:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

   Zwei 2×2-Matrix werden mit $\bullet$ verknüpft, das so definiert ist:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} \cdot a'_{11} + a_{12} \cdot a'_{21}) & (a_{11} \cdot a'_{12} + a_{12} \cdot a'_{22}) \\ (a_{21} \cdot a'_{11} + a_{22} \cdot a'_{21}) & (a_{21} \cdot a'_{12} + a_{22} \cdot a'_{22}) \end{pmatrix}$$

   (siehe auch 'Matrizenmultiplikation' auf
   $http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix\_\%28Mathematik\%29$).
   Sei $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{H} = \{D^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$, wobei $D^j = D^{j-1} \bullet D = \underbrace{D \bullet \ldots \bullet D}_{j \text{ mal}}$.
   Ermittle die Elemente von $\mathcal{H}$. Elemente $A, B \in \mathcal{H}$ verknüpfen wir mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation $A \bullet B$

   Welches ist das neutrale Element? Stellen Sie die Verknüpfungstabelle auf. Ist $(\mathcal{H}, \cdot)$ ein Monoid? Prüfen Sie dies mittels Tabelle nach! Überlegen Sie, welche möglichen Kombinationen von Elementen man betrachten muß.

4. Ist folgende Struktur ein Monoid?
   $\mathcal{M} := (\{0,1,2,3,4,5\}, \boxdot, 0)$ mit $x \boxdot y = max_5(x+y)$ wobei
   $max_5(i) = \begin{cases} 5 : i \geq 5 \\ i : i < 5 \end{cases}$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

5. Ist max_5 ein Monoidmorpismus der $(\mathbb{N}, +, 0)$ auf $\mathcal{M}$ abbildet?

Aufgabe 3 (reguläre Sprachen / DEAs) (3+3+2+3+1+2 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \ell(h(w)) \text{ ist ungerade}\},$$

wobei der Morphismus $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ durch $h(a) = a$ und $h(b) = \lambda$ beschrieben ist und ℓ die aus der Vorlesung bekannte Längenfunktion ist.

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \ell(w) \geq 5\}.$$

$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \ell(w) = 4n + 2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Zeigen Sie: L_1, L_2 und L_3 sind regulär.
   Hinweis: Es genügt hier die Angabe der Monoide, Morphismen und Teilmengen ohne echten Beweis der Richtigkeit der Konstruktion.

2. Geben Sie für L_1, L_2 und L_3 jeweils eine Automaten an, der die Sprache erkennt, entweder durch eine Überführungstafel als auch einen Automatengraphen.