Fernau/Raible
Universität Trier Wintersemester 2006/2007

Übungen zur Vorlesung

Näherungsalgorithmen

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (Extended Local-Ratio-Theorem + Kruskal's MST-Algorithmus)

1. **Extended Local-Ratio-Theorem**
   - Def.: Überdeckung C ist w-minimal, falls $\forall_{x \in C \text{ und } w(x)>0} : C \setminus \{x\}$ ist keine Überdeckung.
   - δ ist minimal-r-effektiv, falls
     (a) $\forall x \in X : 0 \leq \delta(x) \leq w(x)$
     (b) $\delta(C) \leq r \cdot OPT(\delta)$ für alle δ-minimalen Überdeckungen C
   - Betrachte nun folgenden generischen Algorithmus $A(X, f, w)$:
     (a) Nehme minimal-r-effektives δ
     (b) $C \leftarrow B(X, f, w - \delta)$
     (c) Für alle $x \in C$: Falls $\delta(x) > 0$ und $C \setminus \{x\}$ ist Überdeckung, dann $C \leftarrow C \setminus \{x\}$
     (d) **return** C
   - Zeige nun das **Extended Local-Ratio-Theorem**: Falls B ein C mit $(w - \delta)(C) \leq r \cdot OPT(w - \delta)$ liefert, dann $w(C) \leq r \cdot OPT(w)$.

2. Der umgekehrte Kruskal's Algorithmus zur Berechnung eines Minimum Spaning Tree:

   (a) Sortiere die Kanten nach ihren jeweiligen Gewichten absteigend und erhalte $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ mit $w(e_i) \geq w(e_{i+1})$
   (b) $MST \leftarrow E$
   (c) For $i = m...1$
       i. Falls $\{e_i\}$ in Kreis enthalten ist in $G(V, MST)$: $MST \leftarrow MST \setminus \{e_i\}$
   (d) **return** MST

   Benutze nun das **Extended Local-Ratio-Theorem** und den Algorithmus A um die Korrektheit des umgekehrten Kruskal's Algorithmus zu beweisen. Wähle $X := E$ und für $A \subseteq X : f(A) = 1 \iff A$ ist spannender zusammenhägender Subgraph, der alle mit 0 gewichteten Kanten enthält.

Aufgabe 2 (Extended Local-Ratio-Theorem + Complement-Clique-Cover)

Benutze das Extended Local-Ratio-Theorem um Complement-Clique-Cover von Aufgabenblatt 2 zu approximieren mit Güte 2. Überlege welche Menge X darstellt, und wann für ein $C \subseteq X$ gelten soll $f(C) = 1$ (inkl. Monotonie). Benutze auch Aufgabe 4 von Blatt 2.

Aufgabe 3 (Symmetrisches Δ-TSP)

Gegeben $G(V, E)$ und $w : E \to \mathbb{N}$, gesucht kostenminimale Tour durch alle Knoten.

1. Sei ST eine minimaler spannender Baum und T_{opt} eine optimale Rundreise in G.
   Zeige: $w(ST) < w(T_{opt})$.

2. Betrachten Sie die folgende closest point Heuristik für das symmetrische Traveling Salesman Problem mit Dreiecksungleichung: Starte mit einem Zyklus Z_1 , der aus nur einer (beliebigen) Stadt besteht; erweitere in jedem Schritt den Zyklus Z_i um eine Stadt u, für die gilt:

   $$\exists v \in Z_i : \forall x \in Z_i \text{ und } \forall y \notin Z_i : w(\{x, y\}) \geq w(\{v, u\})$$

   Wir wählen also ein $u \notin Z_i$, so daß der Minimalabstand bzgl. aller Städte in Z_i minimiert wird. v sei die Stadt aus Z_i mit dem geringsten Abstand zu u. Dabei soll u unmittelbar nach v und vor dessen Nachfolger in Z_i eingefügt werden um Z_{i+1} zu erhalten. Nach n Schritten ist eine Tour gefunden. Zeigen Sie, daß diese Heuristik eine Tour findet, die höchstens doppelt so lang ist wie die optimale Tour. Hinweis: Vergleichen Sie den Algorithmus mit dem Prim-Algorithmus für MST's:

   (a) $V' \leftarrow v$, wobei v beliebig, $i = 1$, $MST_1 = \emptyset$

   (b) Solange $V \neq V'$, tue

      i. Wähle $e \in E$ mit $w(e) = \min\{\{a, b\} \mid a \in V',\ b \notin V'\}$

      ii. $i = i + 1$, $MST_i = MST_{i-1} \cup \{e\}$, $V' = V' \cup \{e\}$.

   (c) **return** MST_n.

   Tipp: Schätze $w(Z_i)$ in jedem Schritt durch $w(MST_i)$ nach oben ab.

Aufgabe 4 (Steiner-Bäume)

Betrachte folgendes Problem:
STEINER-TREE-PROBLEM
Eingabe: $G(V, E)$, $w : E \to \mathbb{N}_+$, $V = R \cup F$.
Gesucht: Ein Baum $T \subseteq E$, mit minimalen Kosten, der alle Knoten in R verbindet.

Die Knoten in F dürfen quasi als Abkürzungen benutzt werden, wenn dies Sinn ergibt. Im metrischen STEINER TREE PROBLEM gilt ebenfalls die Dreiecksungleichung:

$$w(\{u, v\}) \leq w(\{u, z\}) + w(\{z, u\}$$

'Abkürzungen' sind also nie teurer als der Originalweg.
Zeige: Ein Minimum Spanning Tree auf $G(R, E)$ ist höchstens doppelt so teuer wie die Optimallösung des metrischen STEINER TREE PROBLEM auf einem vollständigen Graphen.