Fernau/Raible
Universität Trier

Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Vorlesung

Näherungsalgorithmen

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass Bin Packing keinen PTAS hat, falls $P \neq NP$.

Tipp: Gehen Sie die vergangenen Übungsblätter durch und suchen Sie die Aufgabe die ebenfalls Bin Packing als Thema hatte. Die Lösung hierzu wird ihnen helfen.

Aufgabe 2

MaxCoverage

Eingabe: Ein Universum $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_q\}$ mit $S_i \subseteq \mathcal{U}$ und $n \geq k > 0$.

Gesucht: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ mit $|\mathcal{C}| = k$ und $|\bigcup_{S \in \mathcal{C}} S|$ größtmöglich.

Nehmen wir an es gibt eine Algorithmus A fÃ¼r MaxCoverage mit einer Approximationsgüte von $(1-\gamma)$ (also $\frac{App}{Opt} \leq 1-\gamma$). betrachte folgenden Algorithmus B:

for $1 \leq m \leq n$ **do**
  $U \leftarrow \mathcal{U}$, $S \leftarrow \mathcal{S}$, $App^m = \emptyset$.
  Wende A auf (U, S) mit $k = m$ an und erhalte als Lösung App.
  $S \leftarrow S \setminus App$, $U \leftarrow U \setminus \cup_{i \in App} S_i$, $App^m \leftarrow App^m \cup App$.
  $i \leftarrow 0$. $\forall 1 \leq k \leq q$. $S_k^0 = S_k$, $U^0 = U$.
  while $U \neq \emptyset$ **do**
    Nehme kleinstes $1 \leq m' \leq m$, so dass A Lösung App für $(U^i, \{S_1^i, \ldots, S_q^i\})$ mit $k = m'$ liefert.
    $\forall 1 \leq k \leq q:\ S_k^{i+1} \leftarrow S_k^i \setminus \cup_{z \in App} S_z^i$, $U^{i+1} \leftarrow U^i \setminus \cup_{z \in App} S_z^i$, $App^m \leftarrow App^m \cup App$.
    $i \leftarrow i + 1$.
  end while
end for
Sei App^ℓ so dass $|App^\ell| = \min_{1 \leq i \leq m}\{|App^i|\}$
return App^ℓ.

Zeige, dass B ein Approximationsalgorithmus für Set Cover ist mit Ratio $\log_{1/\gamma} n$. also $App/Opt \leq \log_{1/\gamma} n$.

Tipp: Überlege zuerst wie oft die While Schleife ausgeführt werden kann.

Aufgabe 3 (Königs bipartites Kantenfärbungs Theorem)

Sei $G(A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph (also $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) und $\Delta = \max\{deg(v) \mid v \in (A \cup B)\}$. Zeige nun, dass G eine gültige Kantenfärbung mit Δ Farben besitzt. Gehe dabei am besten wie folgt vor und zeige erst folgendes:

1. Sei $c : E \to \{1, \ldots, k\}$ eine gültige Kanten Färbung. Sei $E_i := \{e \in E \mid col(e) = i\}$ für $1 \leq i \leq k$. Für $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$ zeige, dass $G[E_i \cup E_j]$ aus disjunkten Pfaden und Kreisen besteht.

2. Sei C eine Komponente in $G[E_i \cup E_j]$ für $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Zeige, dass G gültig gefärbet bleibt falls man auf C nicht col sondern die Färbung

$$col'(e) = \begin{cases} col(e) : col(e) \notin \{i, j\} \\ \quad i \quad : col(e) = j \\ \quad j \quad : col(e) = i \end{cases}$$

   anwendet.

3. Falls $|E| \leq \Delta$ dann gilt obiges Theorem.

4. Wir wollen nun eine Induktion nach Anzahl der Kanten machen. Für $|E| = 1$ gilt dies mit 2..
   Sei nun $|E| > 1$. Wähle nun ein $\{a, b\} \in E$ und betrachte $G'(V, E \setminus \{\{a, b\}\}]$. Für G gilt laut Induktionsannahme das Theorem. Es gibt nun folgende Fälle:

   (a) G' kann mit $\Delta - 1$ Farben gefärbt werden. Zeige, dass dann für G Δ-Farben reichen.

   (b) Es gilt $deg_{G'}(a) < \Delta$ und $deg_{G'}(b) < \Delta$. Zeige, dass wenn eine Farbe q sowohl bei a als auch bei b nicht vorkommt, dann können wir G mit Δ Farben färben.

   (c) Hier gibt es also eine Farbe i, die bei a nicht vorkommt und j, die bei b nicht vorkommt. Zeigen Sie nun, dass a und b in $G[E_i \cup E_j]$ nicht in der gleichen Komponente liegen können. (Tipp: Aufgabe 1.).

   (d) Zeige nun, dass im Fall c) eine gültige Färbung gefunden werden kann. (Tipp: Aufgabe 2.).