

Übungen zur Vorlesung
Näherungsalgorithmen
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (BIN PACKING / FirstFit)

Betrachte das Problem BIN PACKING (siehe Seite 12, VL5).

Die FirstFit-Heuristik arbeitet die Gegenstände in der gegebenen Reihenfolge ab. Ist im Verlauf des Algorithmus B_j der zuletzt benutzte Behälter und wird Gegenstand a_i betrachtet, so wird a_i an B_j zugewiesen, falls es noch geht, und sonst an B_{j+1} .

Gib nun eine Sequenz von Gegenständen an, sodaß die FirstFit-Heuristik mindestens $\frac{5}{3}$ soviele Behälter benötigt wie das Optimum.

Können Sie unendlich lange Eingabesequenzen angeben mit der gleichen Eigenschaft?

Aufgabe 2 (MIN STRIP PACKING)

MIN STRIP PACKING:

Eingabe: Eine Folge von Rechtecken $L = (r_1, \dots, r_n)$ mit Breite $w(r_i) \leq 1$ und Höhe $h(r_i) \leq 1$; Ein Streifen S der Breite 1 und unbeschränkter Höhe.

Ausgabe: Eine Packung von L in S , so dass sich keine zwei Rechtecke überschneiden.

Opt: Minimiere die Höhe des gepackten Teils des Streifens S .

Betrachte den Algorithmus NextFitDecreasingHeight (NFDH) für MIN STRIP PACKING:

- 1: Sortiere L nach absteigender Höhe (danach $h(r_1) \geq \dots \geq h(r_n)$).
- 2: Sei $St_1 = 0$, $j = 0$.
- 3: **for** $i = 1 : n$ **do**
- 4: Falls auf Höhe St_j r_i soweit wie möglich links abgelegt werden kann, tue dies.
- 5: Sonst sei $maxh$ die Höhe des ersten (auch höchsten) Rechtecks auf Höhe St_j .
- 6: $St_{j+1} = St_j + maxh$, $j = j + 1$, gehe zu 4.
- 7: **end for**

NFDH hat folgende Eigenschaften:

- Alle r_i werden auf eine der Stufen St_j gesetzt.
- S_1 ist die Grundseite des Streifens S .

- Die Höhe jeder Stufe S_j wird durch das höchste Element in S_{j-1} bestimmt, indem von der Oberseite eine horizontale Linie gezogen wird.

B_i sei die Fläche zwischen den Stufen S_i und S_{i+1} . A_i sei die Gesamtfläche der Rechtecke in B_i . H_i sei die Höhe des Blocks. Aufgrund von Schritt 1 in NFDH gilt: $H_1 \leq \dots \leq H_t$, wenn B_t der letzte Block ist.

Finden Sie eine Folge von Eingaben L_k so dass gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{NFDH(L_k)}{Opt(L_k)} = 2$$

Aufgabe 3

1. Sei x_i die Breite des 1. Rechtecks in B_i und y_i die Gesamtbreite der Rechtecke in B_i . Zeige $y_i + x_{i+1} > 1$.
2. Zeige $A_i + A_{i+1} \geq h_{i+1}(y_i + x_{i+1})$ und damit $A_i + A_{i+1} > H_{i+1}$
3. Finden Sie eine untere Schranke für das Optimum, das nur von den $Fl_i := h(r_i) \cdot w(r_i)$ (also der Fläche von r_i) abhängt.
4. NFDH liefert $Sol := \sum_{1 \leq w \leq t} H_w$ als Lösung. Zeigen Sie, dass $Sol \leq 2Opt + 1$.