Fernau/Raible
Universität Trier

Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Vorlesung

Näherungsalgorithmen

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1
Sei Ξ ein kombinatorisches Optimierungsproblem und A ein PTAS zu Ξ. Zur Eingabe I sei $Z(I)$ eine obere Schranke für $OPT(I)$, d.h. $OPT(I) \leq Z(I)$. Definieren Sie $\epsilon := \frac{1}{Z(I)+1}$.
Zeigen Sie, dass dann $A(I,\epsilon) = OPT(I)$ ist. Hier ist ϵ der relative Fehler von A,

Aufgabe 2
Ein *ganz streng polynomielles Approximationsschema* ist ein PTAS, dessen Laufzeit sogar durch $O(poly(|I|, log(\frac{1}{\epsilon})))$ beschränkt ist. Zeigen Sie: Gibt es zu einem Optimierungsproblem, dessen Entscheidungsvariante NP-vollständig ist und bei dem die Werte mit $O(poly(|I|))$ Bits dargestellt werden können, ein ganz streng polynomielles Approximationsschema, so ist P = NP.

Aufgabe 3
Longest Path fragt nach einem Pfad mit k unterschiedlichen Knoten in G. $G^\star(V^\star, E^\star)$ wird wie folgt konstruiert. Für jede Kante $\{u, v\}$ tue folgendes:

- Ersezte $\{u, v\}$ durch jeweils eine neue Kopie $G_{u,v}$ von G.
- Verbinde die Knoten u, v mit allen Knoten in $G_{u,v}$.

Zeigen Sie nun:

1. Falls G einen Pfad P der Länge ℓ besitzt (P hat ℓ Knoten), dann hat $G^\star$ einen der Länge ℓ^2.
2. Falls es einen Pfad der Länge m in $G^\star$ gibt, dann gibt es auch einen der Länge $m' \geq m$ so dass $\sqrt{m'}$ eine natürliche Zahl ist. darüber hinaus existiert in G eine Pfad der Länge $\sqrt{m'}$.

3. Falls es einen Algorithmus mit relativer Güte c gibt so gibt es auch einen PTAS.

Aufgabe 4

TWO-DIMENSIONAL KNAPSACK ist:
Eingabe: $w_1, \ldots, w_n$ (Gewichte), $v_1, \ldots, v_n$ (Volumen), W, V
Ausgabe: $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq W$ und $\sum_{i \in I} v_i \leq V$
Maß: $|I|$
Optimierung: min

Zeige: Unter der Annahme $P \neq NP$ hat TWO-DIMENSIONAL KNAPSACK keinen $FPTAS$.
Tipp:Reduziere das folgende NP-harte Entscheidungs-Partitionsproblem auf TWO-DIMENSIONAL KNAPSACK:
Eingabe: ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_{2m}$ mit $\sum_{i=1}^{2m} = 2A$ und $A/(m+1) < a_k < A/(m-1)$ für alle $1 \leq k \leq 2m$.
Frage: Gibt es $K \subseteq \{1, \ldots, 2m\}$ mit $\sum_{k \in K} a_k = A$.