Fernau/Raible
Universität Trier

Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Vorlesung
Näherungsalgorithmen
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1
LONGEST PATH fragt nach einem Pfad mit k unterschiedlichen Knoten in G.
$G^\star(V^\star, E^\star)$ wird wie folgt konstruiert. Für jede Kante $\{u, v\}$ tue folgendes:

- Ersetzte $\{u, v\}$ durch jeweils eine neue Kopie $G_{u,v}$ von G.
- Verbinde die Knoten u, v mit allen Knoten in $G_{u,v}$.

Zeige

1. Wenn es einen Pfad P mit ℓ Knoten gibt, dann gibt es auch einen Pfad P' in $G^\star$ mit $|P'| = \ell^2$.
2. Sei P' ein Pfad in $G^\star$. Dann können wir annehmen (modulo Polynomialzeit), dass es ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|P'| = \ell^2$ oder $|P| = \ell^2 + \ell$. Ebenso gilt dann, dass es einen optimalen Pfad der Länge ℓ in G gibt.
3. Wenn P' ein optimaler Pfad ist (und somit Punkt 2 erfüllt), dann hat ein optimaler Pfad P_{opt} in G Länge ℓ
4. Zeige, falls es eine Approximationsalgorithmus A mit Güte c gibt, dann gibt es auch einen PTAS. (Für eine Instanz I gilt also:$\frac{Opt(I)}{A(I)} \leq c$).
   Tipp: Sei $G^{i\star} := (G^{(i-1)\star})^\star$, wobei $G^{0\star} := G$ und $G^{1\star} := G^\star$. Wende dann A auf $G^{i\star}$ an mit i gross genug. Evtl. brauchen Sie $a)\sqrt{\ell^2 + \ell} \geq \sqrt{\ell^2} \geq \ell$, $b)\sqrt{\ell^2} \leq \sqrt{\ell^2 + \ell} \leq 2\ell$.

Da an anderer Stelle (nicht in dieser Vorlesung) gezeigt wurde, dass LONGEST PATH keine PTAS besitzt, folgt hiermit, dass auch keine Approximation mit konstanter Güte gibt.

Aufgabe 2
Erinnern sie sich an den *PTAS* für INDEPENDENT SET auf planaren Graphen aus der Vorlesung. Wie in diesem Fall gibt es einen Algorithmus für VERTEX COVER der in Zeit $O(8^k n)$ eine optimale Lösung für Graphen mit Außerplanarität k findet. Im folgenden wird ein *PTAS* für VERTEX COVER angeben, wobei

für die Güte r gilt: $1 < r < 3$.

VC-PTAS (G = (V, E), r)

1. Setze $k := \left\lfloor \frac{3-r}{r-1} \right\rfloor$.
2. Bestimme eine planare Einbettung von G.
3. Berechne die Knotenschichten. (Sei V_i die Menge der Knoten auf Schicht i.)
4. Für $i = 0$ bis K tue
   (a) Sei $\overline{V_i}$ die Vereinigung aller V_j mit $j = i \mod k+1$.
   (b) $G_i := G(V \setminus V_i)$ (G_i hat Außerplanarität k)
   (c) Berechne größtmögliches Vertex Cover VC_i von G_i.
   (d) Sei $\overline{V_i}^3 = \{V_j, V_{j-1}, V_{j+1} \mid V_j \in \overline{V_i}\}$ (hat Außerplanarität 3)
   (e) Berechne größtmögliches Vertex Cover VC_i^3 von $\overline{V_i}^3$.
5. Sei $VC_m \cup VC_m^3$ derart, daß $|VC_m \cup VC_m^3| = \min\{|VC_i \cup VC_i^3| \mid 0 \leq i \leq K\}$
6. Liefere $VC_m \cup VC_m^3$ zurück.

Zeige, dass der Algorithmus eine Lösung *App* liefert, sodass $\frac{|App|}{|Opt|} \leq r$ gilt.

Aufgabe 3 ($\frac{5}{3}$-Approximation für planares VERTEX COVER**)**
Betrachte folgenden Algorithmus $PlanVC$:

1. $VC \leftarrow \emptyset$, $i = 0$
2. Solange G ein $U \subseteq V$ enthält, so dass $G[U]$ ein Dreieck ist: $VC \leftarrow VC \cup U$, $V \leftarrow (V \setminus U)$, $i \leftarrow i+1$, $d_i \leftarrow 2$
3. Solange $V \neq \emptyset$, tue:
   (a) Nehme $v \in V$ mit minimalem Grad d, $i \leftarrow i+1$, $d_i \leftarrow d$.
   (b) $X := N(v)$, $Y := N^2(v)$, $E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in (X \cup Y)\}$
   (c) Finde in $G(X \cup Y, E')$ ein Matching M mit $|M| = |M \cap X| = d - 1$.
   (d) $VC \leftarrow VC \cup X \cup (M \cap Y)$

Fragen:

1. Warum ist der Graph in 3.(c) bipartit und wie lässt sich ein Matching M mit $|M| = |M \cap X| = d - 1$ leicht finden?

2. Sei e die Anzahl der Iterationen (der letzte i-Wert), dann $\tilde{d} := \frac{\sum_{i=1}^{e} d_i}{e}$.
Zeige: $\dfrac{VC}{OptVC} \leq 2 - \frac{1}{\tilde{d}}$.
Tipp: Überlege wieviele Knoten $OptVC$ für Dreiecke bzw. für $G[\{v\} \cup X \cup (M \cap Y)]$ mindestens braucht und wieviele $PlanVC$ nimmt.

3. Zeige: $\dfrac{VC}{OptVC} \leq \frac{5}{3}$ für planare Graphen. Zeige zuerst die folgenden Eigenschaften:

   (a) Für planare, dreiecksfreie Graphen gilt: $|E| < 2|V|$.
   Tipp: Schätze die Anzahl der Faces nach oben mit $|E|$ ab und verwende die Eulerformel.

   (b) Zeige, dass $d_i \leq 3$ für $i = 1, \ldots, e$. Dies bedeutet also, dass in (a) v höchstens 3 Nachbarn hat. Nutze $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$. Betrachte den Durchschnittsgrad!

   (c) Folgere nun $\frac{VC}{OptVC} \leq \frac{5}{3}$ mit 2.