

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
Aufgabenblatt 11

In der Übung Dienstag 3.2.09 um 10.15 Uhr im HZ204
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1

Beweisen Sie: Für jede Sprache $A \in \Sigma^*$ und einer Klasse von Sprachen M (z.B. $M = \text{PSPACE}$) gilt

$$M^A = M^{\bar{A}}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass PSPACE unter folgenden Operationen abgeschlossen ist:

- Vereinigung
- Schnitt
- Komplement
- Kleenescher Hüllenbildung

Aufgabe 3

Wir betrachten das Spiel COMPETITIVE FACILITY LOCATION (CFL). Es sei ein Graph $G(V, E)$, $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ und $B_1, B_2 \in \mathbb{N}$ gegeben.

Das Spiel wird von zwei Spielern P_1, P_2 gespielt. Zuerst zieht P_1 dann P_2 danach P_1 usw. Wenn ein Spieler am Zug ist markiert er einen Knoten v in G aus. Sei $M_i \subset V$, die von P_i bereits markierten Knoten. Dann muss folgendes immer gelten:

1. M_1 ist eine unabhängige Menge.
2. M_2 ist eine unabhängige Menge.
3. $M_1 \cup M_2$ ist eine unabhängige Menge.

Das Auswählen eines Knotens entspricht dem Eröffnen einer Kaffee filiale in einer Region. Das Kartellamt hat entschieden, dass in zwei benachbarten Regionen keine zwei Filialen stehen dürfen (selbst wenn eine von P_1 ist und die andere von P_2). Dies wird durch die 3 Eigenschaften gesichert.

Es soll nun entschieden werden ob es eine Strategie für P_2 gibt, sodass nach P_2 letzten Zug $B \leq \sum_{v \in M_2} w(v)$.

1. Zeigen Sie $CFL \in PSPACE$.
2. Wir wollen nun zeigen, dass CFL PSPACE-hart ist in dem wir 3-QBF in Poly-zeit darauf reduzieren.
 Es sei nun $F = \exists x_1 \forall y_1 \exists x_3 \dots \exists x_n : C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$ eine 3QBF-Formel mit $V(F) = \{x_1, \dots, x_n\}$ als Variablenmengen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei n ungerade und für alle C_i gilt: $\neg(x_j \in C \wedge \bar{x}_j \in C_i)$.
 Es werden schon mal folgende Fragmente vorgegeben:
 - (a) Für alle x_i kreierte Knoten v_i, \bar{v}_i und eine Kante $\{v_i, \bar{v}_i\}$.
 - (b) Für alle C_i kreierte Knoten z_i . Falls $x_j \in C_i$ füge $\{v_j, z_i\}$ hinzu. Falls $\bar{x}_j \in C_i$ füge $\{\bar{v}_j, z_i\}$ hinzu.
 - (c) Für alle z_i setze $w(z_i) = 1$.

Die Idee der Reduktion ist so: (*) P_1 soll als ersten Zug entweder v_1 oder \bar{v}_1 wählen. Dies soll so sein da in F x_1 auch als erstes gesetzt werden muss. Wenn dann P_2 dran ist soll er zwischen v_2 oder \bar{v}_2 wählen müssen (*).

Aufgabe:

Legen Sie die $w()$ und B_1, B_2 so fest, dass (*)...(*) gelten muss. Soll heißen, falls einer der beiden Spieler davon abweicht, hat er sofort verloren. Gleichzeitig müssen die Werte so festgelegt werden, dass P_2 nur gewinnen kann falls nach der Variablenbelegung (Entquantifizierung von F) $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$ falsch wird. Da in unserer Instanz von CFL die ersten n Züge nicht aus z_i 's wählen, muss sich also im $n + 1$ Zug (P_2 dran) entscheiden, ob P_2 gewinnt.

Aufgabe 4

Manche NP-harten Probleme werden auf bestimmten Graphklassen 'weich'!

Sind die folgenden Probleme auf den angegebenen Graphklassen in polynomialer Zeit lösbar oder noch NP-hart?

Es sei VERTEX COVER

Eingabe: $G(V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Ausgabe: $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$ und $\forall e \in E : e \cap V' \neq \emptyset$

1. VERTEX COVER auf Graphen mit Maximalgrad 2.
2. VERTEX COVER auf Graphen, von denen man weiß, dass sie ein Vertex Cover der Größe k besitzen.
3. INDEPENDENT VERTEX COVER, also V' soll zusätzlich eine unabhängige Menge sein.

In oben genannten Problemen fragen wir immer nach einer Lösung der Größe k .