Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

Aufgabenblatt 12

In der Übung Dienstag 10.2.09 um 10.15 Uhr im HZ204
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1

Sie haben in der Vorlesung einen parametrisierten Algorithmus für Vertex Cover kennen gelernt. Die Laufzeit war $O^*(2^k)$[1]. Überlegen Sie, wie Sie diesen Algorithmus beschleunigen können, soll heissen eine Laufzeit der Form $O^*(c^k)$, $c < 2$, erreichen.
Tipp: Sei $v \in V$. Falls v nicht in der Lösung ist, müssen wohl alle Knoten in $N(v)$ in die Lösung. Der Aufwand $T[k]$ läßt sich also rekursiv so abschätzen:

$$T[k] = T[k-1] + T[k - |N(v)|]$$

Das heisst je grösser $|N(v)|$ umso besser. Um nun $T[k]$ abschätzen zu können. muss man die grösste positive Nullstelle von

$$1 - x^{-1} + x^{-|N(v)|}$$

berechnen (Erzeugende Funktionen). Können Sie nun einen Suchbaumalgorithmus angeben, sodass immer $|N(v)| \geq 2$ gilt? Dann wären sie sofort besser als $O^*(2^k)$ (warum?).

Aufgabe 2

Finden Sie parametrisierte Reduktionen:

1. Reduzieren Sie Dominating Set auf Set Cover.
2. Reduzieren Sie Independent Set auf Set packing.

Eine parametrisierte Reduktion ist (kurz gesagt) wie eine 'gewöhnliche' mit einer Ausname. Die Lösungsgrösse in der von der Reduktion erzeugten Instanz darf nur von k abhängen(z.B. $m + k$ wäre verboten).

Set Cover:
Gegeben: Eine Menge U, eine endliche Familie von Mengen $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq U$ und natürliche Zahl k.
Gefragt: Gibt es in S eine Teilmenge von mindestens k Mengen deren Vereinigung U ergibt?

[1] $O^*()$ unterdrückt polynomielle und konstante Faktoren.

SET PACKING:
Gegeben: Endliche Familie von Mengen $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ und natürliche Zahl k.
Gefragt: Gibt es in S eine Teilmenge von mindestens k paarweise disjunkten Mengen?

Aufgabe 3

IRREDUNDANT SET
Eingabe: $G(V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, so dass für alle $x \in V'$ gilt: Es gibt $y \in V \setminus V'$ mit $y \in N[x]$ aber für alle $z \in V' \setminus \{x\}$ gilt $y \notin N[z]$.

In Worten V' ist eine Menge von Königen. Jeder König soll sein eigenes Land besitzen. Das ist entweder das Land auf dem sein Schloss (er selbst) sitzt, wenn diese nicht über eine Brücke (Kante) von einem weiteren König angegriffen werden kann. Oder aber es ist ein Land, das über eine Brücke nur von diesem König erreichbar ist.
Zeigen Sie $W[1]$-Mitgliedschaft. Tun Sie dies indem Sie entweder eine Σ_1-Formel über der Struktur Graph angeben, oder indem Sie das Problem auf KURZE NTM-AKZEPTANZ reduzieren (Gilt $W[1] = A[1]$).