

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
Aufgabenblatt 5

In der Übung Mittwoch 02.12.08 um 10.15 Uhr im HZ204
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1

K-FÄRBBARKEIT ist wie folgt definiert:

Sei gegeben ein Graph $G(V, E)$. Finde eine Funktion $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, so dass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt $c(x) \neq c(y)$. Färbe also die Knoten, so dass keine zwei benachbarten die gleiche Farbe bekommen.

Zeige: 2-FÄRBBARKEIT \in **co-NL**.

Aufgabe 2

Das GRAPH ACCESSIBILITY PROBLEM (GAP) ist wie folgt definiert:

- Gegeben gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und zwei Knoten $x, y \in V$.
- Frage: Ist y in G von x aus erreichbar?

Hierbei muss der Graph G natürlich codiert werden über einem Alphabet $\Sigma = \{(\cdot, \cdot), 0, 1\}$. Formal besteht GAP aus allen Worten $(g)(x)(y) \in W(\Sigma)$ mit

1. g Adjazenzmatrix eines Graphen $G = (\{1, \dots, n\}, E)$
2. x, y binäre Darstellungen zweier Knoten von G
3. in G gibt es einen Pfad von x nach y .

Die Adjazenzmatrix besteht aus einer Folge gleich langer geklammerter Vektoren.

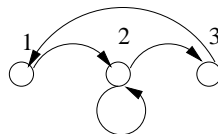


Abbildung 1:

Der Graph in Abb. 1 würde als Adjazenzmatrix auf folgende Weise kodiert:
(010)(011)(100).

Formal ist $\text{co-GAP} = W(\Sigma) \setminus \text{GAP}$. Das heisst, dass in **co-GAP** auch komplette sinnlose Folgen stehen können die keinen Graphen kodieren. Eine 'sinnvoll'

Instanz von CO-GAP besteht ja nur wenn die Punkte 1 und 2 erfüllt sind und die Frage ist ob es keinen Pfad von x nach y gibt.

Wie können Sie die sinnlosen Folgen in logarithmischen Platz erkennen? Was tun Sie mit diesen Folgen? Akzeptieren oder Verwerfen?

Aufgabe 3

Eine bool'sche Formel F ist in 2-konjunktiver Normalform (2KNF), wenn sie die folgende Form hat:

$$F = (l_1 \vee l_2) \wedge (l_3 \vee l_4) \wedge \dots \wedge (l_{n-1} \vee l_n)$$

Dabei sind die l_i Literale, also bool'sche Variablen oder deren Negation. Das Problem für eine Formel in 2-KNF zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, heißt 2SAT. Das Problem für eine Formel in 2-KNF zu entscheiden, ob sie *nicht* erfüllbar ist, heißt 2UNSAT.

1. Zeigen Sie, dass 2UNSAT **NL**-hart ist. Überlegen Sie, welches andere Problem Sie auf 2UNSAT reduzieren müssen. Sie müssen wahrscheinlich überlegen, wie Sie gerichtete Kanten als 2-Klauseln modellieren (Tipp: Implikation).
2. Zeigen Sie, dass 2SAT **co-NL**-hart ist.
3. Sei eine Formel F in 2KNF gegeben. Für jede Klausel $(u \vee v)$ konstruieren wir folgendes Implikationspaar:

$$(\neg u \Rightarrow v) \text{ und } (\neg v \Rightarrow u)$$

$G = (V, E)$ sei der Graph mit $V = \{u \mid u \text{ ist Literal in } F\}$ und $E = \{(u, v) \mid \exists (\neg u \Rightarrow v)\}$

Zeige: F ist nicht erfüllbar \iff Es gibt einen Zykel C in G , der zwei komplementäre Literale $u, \neg u$ enthält.

4. Zeige $2UNSAT \in \mathbf{NL}$.
5. Zeige $2SAT \in \mathbf{co-NL}$.