Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

Aufgabenblatt 8

In der Übung Mittwoch 13.1.09 um 10.15 Uhr im HZ204
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 1
Dominating Set ist folgendes Problem:
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G(V, E)$ und $k \in \mathbb{N}^+$
Frage: Gibt es $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, so dass es für alle $v \in V \setminus V'$ es ein $u \in V'$ gibt, so dass $\{u, v\} \in E$.
Zeigen Sie, dass Dominating Set **NP**-vollständig ist.
(Tipp: Nehme Vertex Cover zu Hilfe)

Aufgabe 2
Exact Cover by 3-Sets ist folgendes Problem:
Gegeben: $U = \{1, \ldots, n\}$ und $S_1, \ldots S_\ell$ mit $|S_i| = 3$ für $1 \leq i \leq \ell$.
Gesucht: $A \subset \{1, \ldots, \ell\}$ mit $\cup_{k \in A} S_k = U$ und für alle $i, j \in A$ mit $i \neq j$ gilt $S_i \cap S_j = \emptyset$.

Knapsack ist folgendes Problem:
Gegeben: positive Zahlen $w_1, \ldots, w_m, W, v_1, \ldots, v_m, k$.
Gesucht: $I \subset \{1, \ldots, m\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i = W$ und $\sum_{i \in I} v_i = k$.

Zeigen Sie: Exact Cover by 3-Sets $\leq_L$ Knapsack.
(Tipp: Kodieren Sie U und die Mengen S_i als Binärzahlen.)

Aufgabe 3
Bin Packing ist so definiert:
Gegeben: $b, k \in \mathbb{N}$, Objekte $a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \leq b$ für $1 \leq i \leq n$.
Gesucht:$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $1 \leq j \leq k$ gilt $\sum_{f(i)=j} a_i \leq b$.

Zeigen Sie, dass Bin Packing **NP**-vollständig ist.
(Tipp: Das **NP**-vollständige Problem A für das Sie A $\leq_P$ Bin Packing zeigen müssen, befand sich schon auf einem vorangegangenen Blatt. A steht ebenfalls in Relation zu Rucksack).

Aufgabe 4
MinSat ist folgendes Problem: Gegeben eine boolsche Formel F in KNF über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, finde eine Belegung der Variablen, so dass höchstens

k Klauseln erfüllt werden.

Interpretieren Sie die Klauseln als Knoten in einem Graphen. Verbinden Sie dann die Klauseln, welche nicht gleichzeitig falsch werden können. Dies ergibt den Graphen G_I. Zeigen Sie:

1. Wenn F eine Belegung hat, die k Klauseln wahr macht, so hat G_I ein Vertex Cover der Grösse k.
   (Tipp: Nutze das Komplement eines Vertex Cover).

2. Wenn G_I ein Vertex Cover der Grösse k hat so hat F eine Belegung, die höchstens k Klauseln erfüllt.

Also gilt damit: F hat eine Variablenbelegung die höchstens k Klauseln erfüllt gdw. G_I eine Vertex Cover mit höchstens k Knoten besitzt (also MinSAt $\leq_P$ Vertex Cover) .