

## Übungen zur Vorlesung Parametrisierte Algorithmen Aufgabenblatt 6

In der Übung Mittwoch 16.01.08 um 8.30 Uhr im H406  
werden die Übungsaufgaben vorgerechnet.

### Aufgabe 1 (Exakte exponentialzeit Algorithmen)

Zeigen Sie, daß HITTING SET in Zeit  $O(c^n)$  mit  $c < 2$  lösbar ist. Die Variable  $n$  gibt die Größe des Elementuniversums an.

Tipp: Überlegen Sie, wie man es algorithmisch ausnutzen kann, wenn man von einem Element in einer Menge weiß, daß es nicht in der Lösung ist. Sprich: Bei einer Menge  $C = \{x_1, x_2, x_3\}$  kann ich in einem Suchbaumzweig annehmen, daß  $x_1$  Lösungselement ist. Damit ist diese Möglichkeit auch für alle anderen Verzweigungen abgedeckt.

### Aufgabe 2 (Dynamisches Programmieren)

Ein  $P_2$  ist ein Pfad der aus 2 Kanten und 3 Knoten besteht. Wir betrachten folgendes Problem:

$P_2$ -PACKING

**Gegeben:** Ein Graph  $G(V, E)$ , und der Parameter  $k$ .

**Wir fragen:** Gibt es eine Menge von  $k$  knotendisjunkten  $P_2$ 's ?

Zeigen Sie, daß dieses Problem in Zeit  $O(2^n)$  gelöst werden kann.

Tipp: Betrachten Sie alle Knotenteilmengen und überlegen Sie sich welche Teillösungen Sie jeweils speichern müssen.

### Aufgabe 3 (Baumweite)

Sei  $G = (V_G, E_G)$  ein Graph.

1. Eine *Baumzerlegung* von  $G$  ist ein Paar  $\langle \{X_i \mid i \in V_T\}, T = (V_T, E_T) \rangle$  mit  $\forall i \in V_T : X_i \subseteq V_G$ , wobei  $T$  ein Baum ist und die folgenden Bedingungen gelten:

(a)  $\bigcup_{i \in V_T} X_i = V_G$ ,

(b)  $\forall (u, v) \in E_G \exists i \in V_T : u \in X_i \wedge v \in X_i$ ,

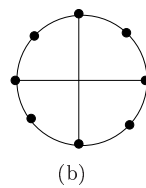
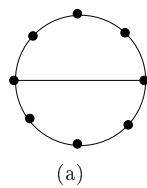
(c)  $\forall i, j, k \in V_T$  : Falls  $j$  in  $T$  auf dem Pfad zwischen  $i$  und  $k$  liegt, so gilt  $X_i \cap X_k \subseteq X_j$ .

Die *Weite* einer Baumzerlegung  $(\{X_i \mid i \in V_T\}, T)$  ist definiert als  $\max_{i \in V_T} \{|X_i| - 1$ .

- Die *Baumweite*  $tw(G)$  von  $G$  ist der minimale Wert  $k$ , so dass  $G$  eine Baumzerlegung der Weite  $k$  besitzt.

Betrachten Sie nun folgende Aufgaben:

- Zeigen Sie, daß jeder induzierte Kreis Baumweite 2, aber nicht Baumweite 1 besitzt.
- Welche Baumweiten besitzen folgende Graphen:



- Zeigen Sie:

$G$  hat ein Vertex Cover der Größe  $r \Rightarrow G$  hat eine Baumzerlegung der Größe  $r$ .

- Zeigen Sie:

$G$  hat ein Feedback Vertex Set der Größe  $t \Rightarrow G$  hat eine Baumzerlegung der Größe  $t + 1$ .

Tipp: Für die Teilaufgaben 1. und 2. sollten Sie die Charakterisierung durch das RÄUBER-UND-GENDARM-SPIEL aus Vorlesung 9 nutzen!

#### Aufgabe 4. (Baumzerlegung und dynamisches Programmieren)

Überlegen Sie, wie Sie das NP-vollständige 3-COLORING-Problem mittels Baumzerlegung und dynamischen Programmierens lösen können. Finden Sie einen Algorithmus mit der Laufzeit  $O(3^{tw(G)} \cdot tw(G) \cdot |G|)$ , wenn  $tw(G)$  die Baumweite des gegebenen Graphs  $G(V, E)$  ist.

**Eingabe:** Ein Graph  $G(V, E)$ .

**Frage:** Gibt es eine Partitionierung der Knotenmenge  $V$  in drei Teilmengen, so daß keine zwei Knoten derselben Teilmenge durch eine Kante verbunden sind?

Tipp: Benutzen Sie eine hübsche Baumzerlegung.